

確率有限要素法の精度に関する 2, 3 の考察

西村伸一・藤井弘章

(基盤整備学講座)

Received October 15, 1993

Some Considerations on the Accuracy of the Stochastic Finite Element Method

Shin-ichi NISHIMURA and Hiroaki FUJII

(Department of Agricultural Infrastructure Development and Conservation)

Geotechnical parameters have inherent spatial variability, and form random fields. The stochastic finite element method (*SFEM*) is necessary when carrying out finite element calculations considering such variability. This paper deals with a simple linear elastic problem and discusses *SFEM* in the case that Young's modulus is a random process.

If the random process is *Gaussian*, the basic characteristics can be decided by the mean function and the auto-correlation function. The first purpose of this research is to clarify the sufficient number of finite element mesh divisions for these functions. *SFEM* calculations are carried out for some finite element models which have different numbers of divisions and the same boundary condition.

In this research, the Monte Carlo simulation method (*MC method*) and the linear approximation method (*LA method*) are used as *SFEM*. Calculation by the latter costs less than the former, so it is an economical method. But the accuracy of the *LA method* decreases when the coefficient of variation of Young's modulus increases. Secondly, this paper clarifies the relationship between the accuracy of the *LA method* and the coefficient of variation of Young's modulus.

緒 言

地盤工学における材料定数は、本来空間的なばらつきを有し、確率場を形成している。そのような材料定数のばらつきを考慮に入れた有限要素解析を行う場合、確率有限要素法と呼ばれる手法が用いられる。本研究では、その最も単純なケースとして、線形弾性問題を対象に、ヤング率の確率場を考慮に入れ、計算結果である節点変位の平均値、標準偏差の精度についての考察を行っている。

ヤング率を空間的な正規確率過程とすると、統計的解析にはその平均値関数と自己相関関数が必要である。ここでは、第一に、解析上、その平均値関数と自己相関関数を表現するのに必要な、解析モデルの要素分割数についての考察を行っている。

確率有限要素法として、本研究では線形近似法とモンテカルロシミュレーション法を用いている。前者は、後者に比較すると計算時間を節約できる利点があるが、ヤング率の変動性が大きい場合、解析結果の精度に問題が生じる。したがって、ここでは第二の課題として、ヤング率の変動係数に伴うこれら二法の計算結果の比較を行っている。

解析手法および対象

1. ヤング率の自己相関関数

本研究においては、ヤング率に関する確率場を均質（定常）であると仮定し、(1)~(3)式の自己相関関数（ここでは、自己共分散関数の形で与えている。）を用いる。(1)式は一次元確率場に対応しており、(2)、(3)式は二次元確率場に対応している。また、平均値は空間内で一定であると仮定する。

二次元の解析を行う場合、常識的には二次元の確率場を考えねばならない。しかし、自然堆積地盤では、地盤の水平方向の相関は鉛直方向のそれに比して非常に大きく、一次元の確率場と考えるとよい場合が多い。したがって、ここでは特に、一次元の確率場に関する考察も行った。

$$r(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp(-\tau/\delta) \quad (1)$$

σ^2 : 分散 τ : 2点間の距離 δ : 相関距離

$$r(\Delta X, \Delta Y) = \sigma^2 \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\Delta X}{\delta_X}\right)^2 - \left(\frac{\Delta Y}{\delta_Y}\right)^2\right\} \quad (2)$$

δ_X, δ_Y : X 方向, Y 方向の相関距離

$\Delta X, \Delta Y$: X 方向, Y 方向に関する 2点間の距離

$$r(\Delta X, \Delta Y) = \sigma^2 \cdot \exp\left[-\left\{\left(\frac{\Delta X}{\delta_X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{\delta_Y}\right)^2\right\}^{1/2}\right] \quad (3)$$

2. モンテカルロシミュレーション法を用いた確率有限要素法

本研究では、地盤のヤング率を確率過程とみなしているが、その確率過程をモンテカルロ法を用いてシミュレートすることによって、解析結果である変位の統計量を知ることが出来る。本節では、その具体的なシミュレーション手法を示す。

確率過程をシミュレートするためのモンテカルロ法としては、

- (1) 三角級数モデルを用いる方法^{1,2,3)}
- (2) AR-MA モデルを用いる方法^{4,5)}
- (3) 共分散マトリクスの三角形行列分解を利用する方法⁶⁾

が存在する。本研究では第一法を用いており、以下ではその手法について論じる。ただし、ここでは定常確率過程のみを扱うこととし、一変数二次元確率場のシミュレーションについて解説を行う。

確率変数 f は $N(0, 1)$ 型の確率変数であるとする。二次元確率場 $f(X, Y)$ のサンプル関数が次の式によって得られる。

$$f(X, Y) = 2 \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \{S_{ff}(\omega_{Xk_1}, \omega_{Yk_2}) \Delta \omega_X \Delta \omega_Y\}^{1/2} \quad (4)$$

$$\times \{ \cos(\omega_{Xk_1} X + \omega_{Yk_2} Y + \Phi_{k_1 k_2}^{(1)}) + \cos(\omega_{Xk_1} X - \omega_{Yk_2} Y + \Phi_{k_1 k_2}^{(2)}) \}$$

S_{ff} : $f(X, Y)$ のスペクトル密度関数

Weiner-Khintchine 変換によると、

$$S_{ff}(\omega_X, \omega_Y) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau_X, \tau_Y) \cdot \exp\{-i(\omega_X \tau_X + \omega_Y \tau_Y)\} d\tau_X d\tau_Y$$

R_{ff} : $f(X, Y)$ の自己相関関数

$\Phi_{k_1 k_2}^{(1)}, \Phi_{k_1 k_2}^{(2)} : 0 \sim 2\pi$ に一様分布する乱数

$$\Delta\omega_X = \omega_{X_u}/N_1$$

$$\Delta\omega_Y = \omega_{Y_u}/N_2$$

$\omega_{X_u}, \omega_{Y_u}$: 角振動数の上限値

$$\omega_{Xk_1} = (k_1 - 0.5)\Delta\omega_X \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1$$

$$\omega_{Yk_2} = (k_2 - 0.5)\Delta\omega_Y \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2$$

ここで、次の形に離散化することによって高速フーリエ変換を用いることができる。
 $f(X, Y)$ を X 方向、 Y 方向に離散化したものを $f_{n,m}$ とすると、

$$\begin{aligned} f_{n,m} &= 2 \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \{S_{ff}(\omega_{Xk_1}, \omega_{Yk_2}) \Delta\omega_X \Delta\omega_Y\}^{1/2} & (6) \\ &\times \operatorname{Re}\{ \exp(i\Phi_{k_1 k_2}^{(1)}) \cdot \exp(i2\pi k_1 n/N_1) \cdot \exp(i2\pi k_2 m/N_2) \\ &+ \exp(i\Phi_{k_1 k_2}^{(2)}) \cdot \exp(i2\pi k_1 n/N_1) \cdot \exp(-i2\pi k_2 m/N_2) \} \\ \omega_{Xk_1} &= k_1 \Delta\omega_X \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1 \\ \omega_{Yk_2} &= k_2 \Delta\omega_Y \quad k_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1 \\ X &= n \cdot \Delta X \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1 \\ Y &= m \cdot \Delta Y \quad m = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1 \\ \Delta X &= 2\pi/\omega_{X_u} \\ \Delta Y &= 2\pi/\omega_{Y_u} \end{aligned}$$

ただし、 $f_{0,0} = 0$

ここで、 $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ は実数部分を表す。

一次元の確率過程についても記述しておく。(4)式と同様に、

$$f(X) = 2 \sum_{k_1=1}^{N_1} \{S_f(\omega_{Xk_1}) \Delta\omega_X\}^{1/2} \cdot \cos(\omega_{Xk_1} X + \Phi_{k_1}) \quad (7)$$

S_f : $f(X)$ のスペクトル密度関数

Weiner-khinchine 変換によると、

$$S_f(\omega_X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau_X) \cdot \exp(-i\omega_X \tau_X) d\tau_X \quad (8)$$

R_f : $f(X)$ の自己相関関数

$\Phi_{k_1} : 0 \sim 2\pi$ に一様分布する乱数

$$\Delta\omega_X = \omega_{X_u}/N_1$$

ω_{X_u} : 角振動数の上限値

$$\omega_{Xk_1} = (k_1 - 0.5)\Delta\omega_X \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1$$

ここでも(6)式と同様に高速フーリエ変換を用いることができる。

ここで求められる確率過程 f は、 $N(0, 1)$ タイプの正規変数であるから、実際のヤング率を表現する乱数は、次の式によって変換して用いる。

$$g = m + \sigma \cdot f \quad (9)$$

ここで、 g はヤング率であり、 m, σ はその平均値と標準偏差を表わしている。乱数 g を有限要素法における材料定数にあてはめ、繰り返し回数分の変位の統計処理を行うことによって、これらの統計量を得ることができる。

3. 一次近似理論を用いた確率有限要素法

近似解法として定義される手法には、テーラー展開を利用した線形近似、二次近似法^{7,8,9,10)} (あるいは摂動法¹¹⁾とも定義することができる.)、Rosenbluth 法¹²⁾、Response-Surface 法^{13,14)} が存在する。本研究では、テーラー展開を利用した線形近似法を用いるので、ここではそれについて解説を行う。

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の関数を $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の期待値と分散は次の式で求まる。

$$E[u] = u(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (10)$$

$$Var[u] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial X_i} \Big|_E \frac{\partial u}{\partial X_j} \Big|_E Cov[X_i, X_j] \quad (11)$$

μ_n : X_n の平均値

$|_E$: $X_1 = \mu_1, \dots, X_n = \mu_n$ での値を表す

また、2つの関数 $u(X_1, X_2, \dots, X_n), v(X_1, X_2, \dots, X_n)$ があるとき、 u と v のあいだの共分散が次の式で計算できる。

$$Cov[u, v] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial X_i} \Big|_E \frac{\partial v}{\partial X_j} \Big|_E Cov[X_i, X_j] \quad (12)$$

具体的に、これを本研究における有限要素法による変形解析の問題に当てはめる場合、確率変数 X がヤング率に対応することになり、関数 u が任意節点の変位に対応する。

本手法は、前節のモンテカルロ法に比較すると計算時間を短縮できる利点がある。しかしながら、関数 u の非線形性が強い場合や、パラメータ X の変動が大きい場合は不向きなので、適用範囲が限られる。

4. 解析モデル

本研究においては、Fig. 1(a)~(d)に示した有限要素と荷重条件を用いて解析を行う。(a)~(d)は、それぞれ、X方向、Y方向に対しての長さを5分割、10分割、15分割、20分割した場合の解析モデルを表している。分割数以外の条件は、4つのモデルにおいて同様である。載荷重としては、モデル左上部に5.0tf/m²の等分布荷重を考える。また、解析に用いる材料定数を Table 1に示す。

解析結果は、載荷重下の点 A と記した節点について考察を行うものとする。

結果と考察

1. 要素分割数に関する考察

ここでは、ヤング率の自己相関特性を表現し得る要素分割数に関する考察を行う。ポアソン比については、確定値であると仮定した。ここでは、ヤング率の変動係数を0.1とし、線形近似法を用いて数種の自己相関関数と相関距離について計算を行った。なお、自己相関関数のラグには各要素の重心間距離を用いた。

Fig. 2には、荷重直下の節点 A の変位の平均値の分割数に対する変化が示されている。これによると、X方向変位に関しては、少なくとも15分割以上必要なことが分かる。Y方向変位については、要素分割数に関する感度が小さい。

Fig. 3は、ヤング率の自己相関関数が(1)式(一次元の自己相関関数)の場合の変位の標準偏差を示している。図には、相関距離 δ が1.0mの場合と2.0mの場合の2とおりを示している。これによると、標準偏差が収束に向かうためには少なくとも10分割が必要である。Fig. 4には、自己相関関数が(2)式の場合と(3)式の場合を示している。(2)式を用いる場合は、相関距離 δ_x, δ_y を1.0m, 2.0mの2とおりとした。これによると、X, Y両方向の変位の標準偏差は、

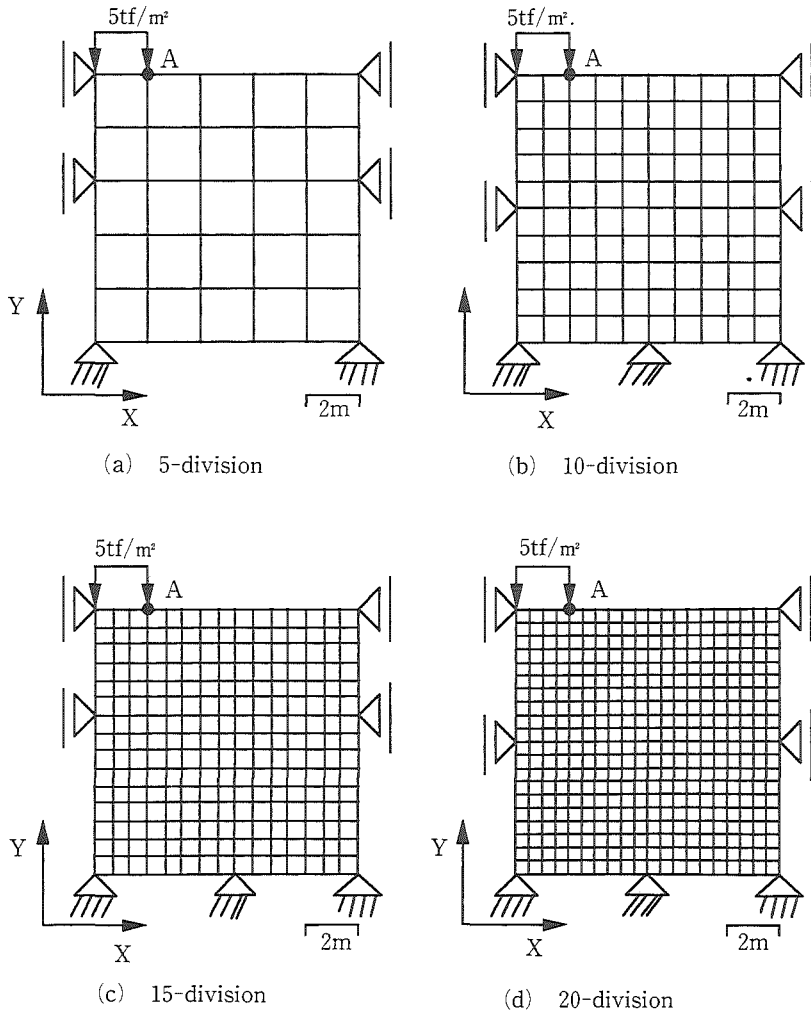


Fig. 1 Analytical models.

Table 1 Elastic moduli for analysis

Mean of Yonug's modulus (tf/m ²)	Poisson's ratio
1000	0.25

10分割程度で収束することが分かる。特に、(2)式を用い、相関距離が2.0mの場合は、5分割でも十分に収束しているといえる。

2. 線形近似法とモンテカルロ法の結果の比較

本研究では、線形近似法の精度を明らかにするため、ヤング率の変動係数を0.1, 0.2, 0.25, 0.3と変化させ、二法の計算結果の比較を行った。ここでは、有限要素モデルとして上記の15分割のものを用いることにし、また、相関距離は、 $\delta = \delta_x = \delta_y = 1.0$ としている。節点Aの変位を対象とする。自己相関関数は、(1)式と(2)式を用いている。

モンテカルロ法については、正規確率過程を用いているため、ヤング率の変動係数が0.3の場合は、極端に小さな(あるいはマイナスの)ヤング率を発生することになる。現実には存在し得ないようなこれらの値が計算結果である変位の値に大きな影響を与える。したがって、

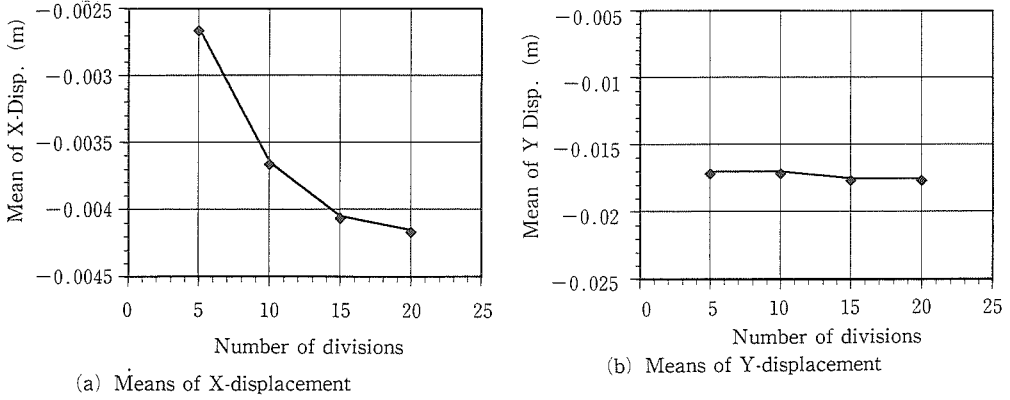


Fig. 2 Mean of displacement versus number of divisions.

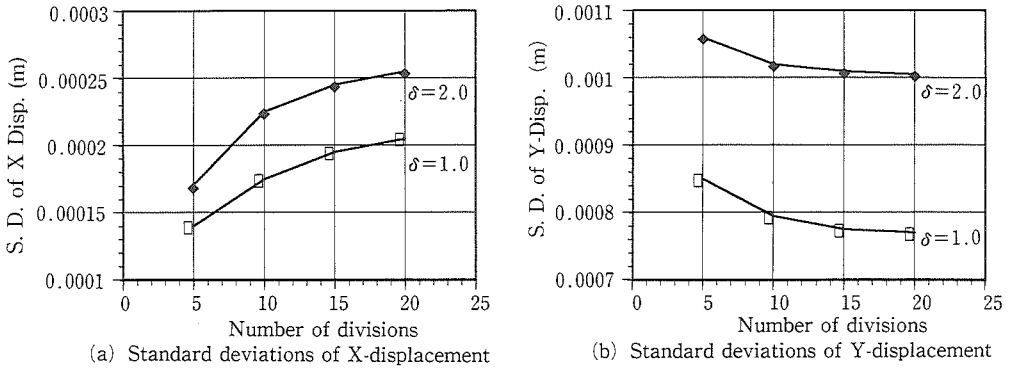


Fig. 3 Standard deviation of displacement versus number of divisions for auto-correlation function eq.(1).

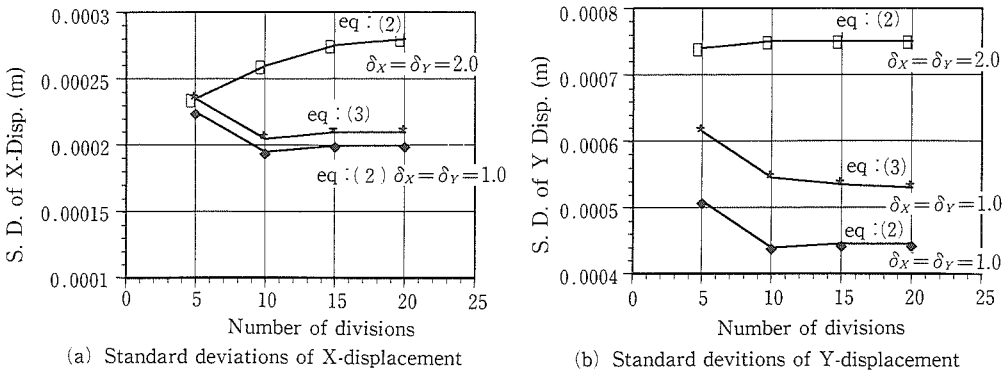


Fig. 4 Standard deviation of displacement versus number of divisions for auto-correlation function eq.(2), eq.(3).

今回は、変動係数が0.3のときの -3σ 値、つまり、本研究の場合は $E=100$ (tf/m²)以下のヤング率は、すべて -3σ 値を与えるようにした。 -3σ 値以下の乱数の発生確率は0.0014以下であると考えられることができるので、このような操作を行っても大きく乱数の精度が悪くなることはない。

平均値に関する解析結果を Fig. 5, Fig. 6 に示している。Fig. 5, Fig. 6 はそれぞれ、自己相関関数として、(1)式、(2)式を用いる場合、そして(a), (b)はそれぞれ X 方向の変位、Y 方向の変位に対応している。図では、モンテカルロ法(MC method)の結果と線形近似法(LA method)の結果が共に示されている。Fig. 5, Fig. 6 に共通して、ヤング率の変動係数が大きいほど変位量が大きくなっている。変動係数が0.2までは、線形近似理論とモンテカルロ法の結果はほぼ一致しているが、この値を超えると線形近似法の精度が悪くなる。しかしながら、変位の平均値の場合、この相違は次に示す標準偏差に比較すると微小であり、実際に線形近似法を用いても問題はないといえる。

次に、標準偏差に関する結果を、Fig. 7, Fig. 8 に示す。Fig. 7, Fig. 8 はそれぞれ、自己相関関数として(1)式、(2)式を用いる場合、そして(a), (b)はそれぞれ X 方向の変位、Y 方向の変位に対応している。ここでも、平均値の場合と同様に、ヤング率の変動係数が0.2までは、二法の結果はよく一致しているが、これを超えるとモンテカルロ法による標準偏差は急激に大きくなる。標準偏差におけるこの二法の相違は大きく、線形近似理論を用いることは、ヤング率の変動係数が0.2を超えると実用上問題があることが分る。

摘 要

- (1) 確率有限要素法の二手法である線形近似法とモンテカルロ法についての定式化を示し

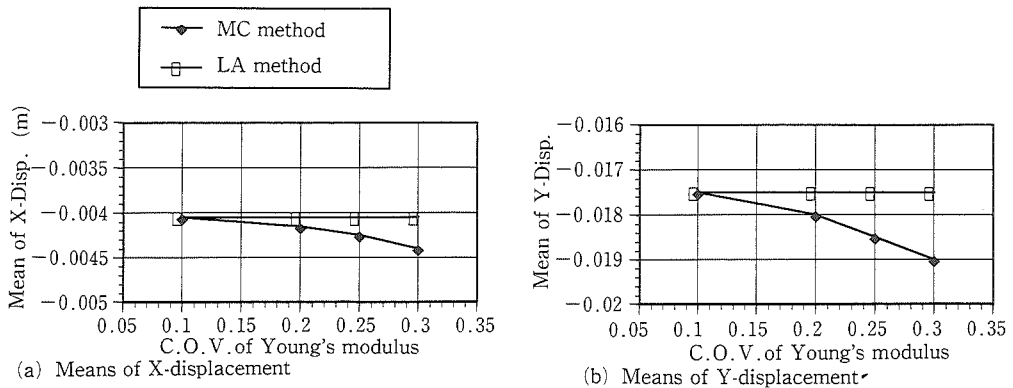


Fig. 5 Mean of displacement versus coefficient of variation of Young's modulus for auto-correlation function eq:(1).

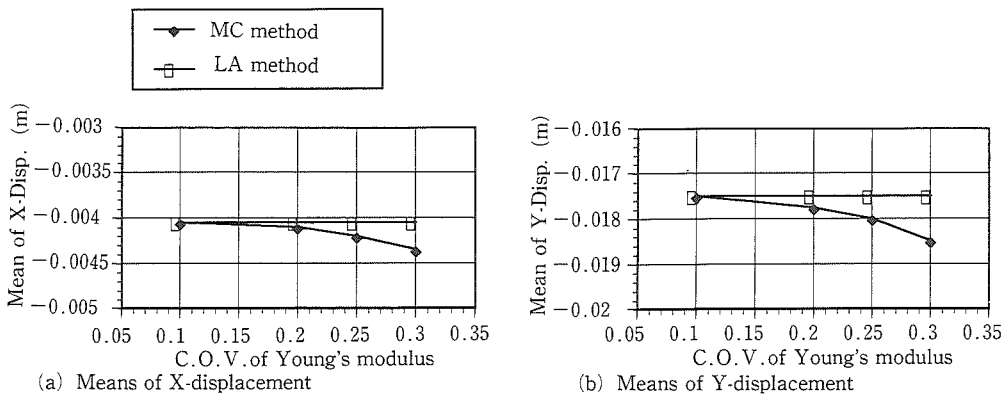


Fig. 6 Mean of displacement versus coefficient of variation of Young's modulus for auto-correlation function eq:(2).

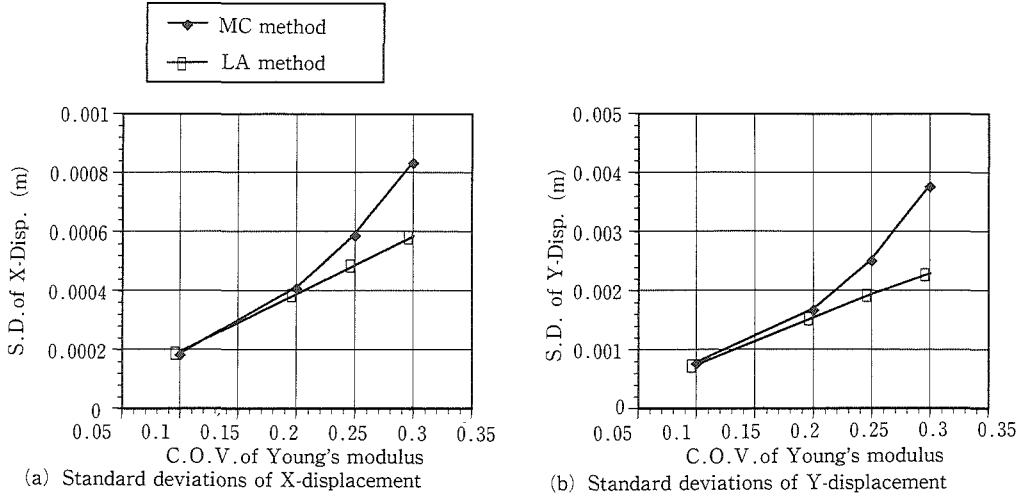


Fig. 7 Standard deviation of displacement versus coefficient of variation of Young's modulus for auto-correlation function eq:(1).

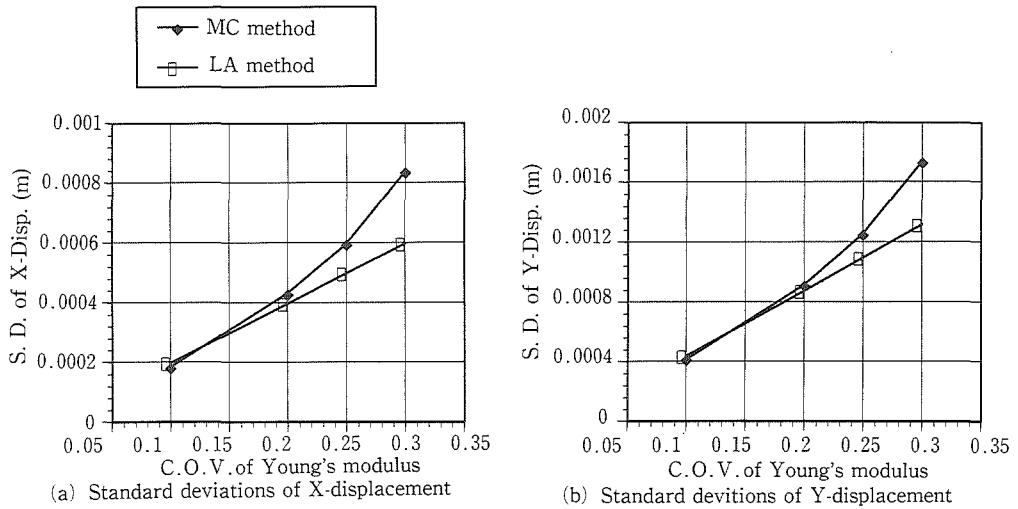


Fig. 8 Standard deviation of displacement versus coefficient of variation of Young's modulus for auto-correlation function eq:(2).

た。特に、モンテカルロシミュレーションについては、一変数一次元確率場と一変数二次元確率場の乱数発生法について示した。

(2)ヤング率の自己相関関数を表現するのに必要な要素分割数について考察を行った。その結果、本解析モデルに関しては、10~15分割で変位の平均値、標準偏差が収束することが分かった。

(3)線形近似法とモンテカルロ法の結果の比較を行った。それによると、線形近似法の結果は、ヤング率の変動係数が0.2の場合まではモンテカルロ法の結果とよく一致するという結論が得られた。ただし、変位の平均値における二手法間での相違は、ヤング率の変動係数が大きい場合でも、本研究の例題に関しては実務上無視しても差し支えないほどの大きさであることが分かった。

本研究の数値計算には、岡山大学情報処理センターの ACOS 2010, SX-1 E を使用した。

文 献

- 1) Shinozuka, M. and Jan, C-M. : Digital Simulation of Random Processes and Its Application, *Journal of Sound and Vibration*, **25**(1), 111—128 (1972)
- 2) Shinozuka, M. : Digital Simulation of Random Processes in Engineering Mechanics with the Aid of FFT Technique, *Stochastic Problem in Mechanics* (edited by S. T. Ariaratnam and H. H. E. Leipholz), 277—286 Waterloo : University of Waterloo Press (1974)
- 3) Shinozuka, M. : Stochastic Field and Their Digital Simulation, *Stochastic Method in Structural Dynamics*, 93—133, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1987)
- 4) Samaras, E., Shinozuka, M. and Tsurui, A. : ARMA Representation of Random Processes, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **111** (EM 3), 449—461 (1985)
- 5) Naganuma, T., Deodatis, G. and Shinozuka, M. : ARMA Model for Two-Dimensional Processes, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **113** (EM 2), 234—251 (1987)
- 6) 星谷 勝・石井 清 : 構造物の信頼性設計法, 80—95, 鹿島出版会, 東京 (1986)
- 7) Benjamin, J. R. and Cornell, C. A. : *Probability Statistics and Decisions for Civil Engineers*, 180—186, McGraw-Hill, New York (1970)
- 8) Cornell, C. A. : First-order Uncertainty Analysis of Soil Deformation and Stability, *Proc. of 1 st Int. Conf. Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, 130—144 (1971)
- 9) Combou, B. : Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, *Proc. of 2 nd Int. Conf. Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Aachen*, 67—86 (1975)
- 10) Ang, A. H.S. : Structural Risk Analysis and Reliability Based-Design, *Journal of the Structural Engineering, ASCE*, **99** (ST 9), 1891—1910 (1973)
- 11) 中桐 滋・久田俊明 : 確率有限要素法入門, 培風館, 東京 (1985)
- 12) Rosenblueth, E. : Point Estimates for Probability Moments, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **72**(10), Oct., 3812—3814 (1975)
- 13) Wong, F. S. : First-Order Second-Moment Methods, *Computers & Structures*, **20**(4), 779—791 (1985)
- 14) Wong, F. S. : Uncertainties in FE Modeling of Slope Stability, *Computers & Structures*, **19**(5/6), 777—791 (1984)