

都市空間における人口密度分布の実証研究：展望

中 村 良 平・李 捷

1. はじめに
2. 人口密度関数型の選択
3. 郊外化現象の検定
4. CBDの識別
 - 4.1 単一のCBD
 - 4.2 複数の雇用中心地区
5. より複雑な人口密度分布の推定
 - 5.1 Cubic Spline モデル
 - 5.2 Switching Regression モデル
 - 5.3 Varying Coefficient モデル
6. データの種類と問題点
 - 6.1 データの種類
 - 6.2 サンプリング・バイアス
7. おわりに

1. はじめに

都市空間における人口密度関数のモデルは、Clark (1951) による負の指数関数型

$$D(x) = D_0 \exp[-\gamma x] \quad (1)$$

が実証分析の先駆的定型として、空間地理学や都市経済学の分野において広く知られている。ここで、 x は都心部 (CBD) からの距離を示し、 D_0 は $x = 0$ となる都心部における人口密度であり、これは通常符号が正である γ とともに推定されるべきパラメータとなっている。

この Clark の人口密度関数のモデルは、

- 1) 都心からの距離のみによって人口密度が規定される。
- 2) 人口密度は距離の増加に伴って一定割合で逓減する。
- 3) 都心が外生的な一点として与えられている。

という特徴ないしは仮定がある。

このように定式化された都市空間における人口密度の分布モデルは、都心からの距離に応じて密度が逓減するという経験法則に基づいたものである。そして、都市内の人口密度分布に関する従来の推定も、大半が人口密度が距離に関して常に一定割合で逓減している負の指数関数 (Negative Exponential Function) を仮定している。

しかし、都市化の長い時間過程には、都心部での常住人口密度が低下し、郊外に行くにつれて密度が上昇する郊外化現象が見られる。それを説明するために、人口密度が距離の増加に伴って逓減する負の指数関数ではなく、より人口密度データに弾力的に対応できるモデルが要求されることになる。そして、これに応じて、より現実のデータ分布に適応できる関数が提示され推定されてきた。そこでは、主に距離のみに依存するモデルの関数形の改善と、社会経済変数を取り入れることによるモデルの改良の二つ大きな流れに分かれることができる。

都市域における人口密度分布関数についての研究論文の流れは、1989年に McDonald が、1970年代から1980年代半ばまでの成果について総括している。そこでは、人口密度関数の関数型の進展について簡単にふれた後、Frankena (1978) が指摘したデータ特性に起因する推定上の問題に関して詳しく述べている。また、都市人口の郊外化現象や都心部の空洞化現象など当時アメリカの都市で現れていた空間密度分布に対して、Cubic Spline 関数を適用した Anderson (1982, 1985) の論文を高く評価している。さらに関数型の探索に関しては、当時広汎に用いられてきた Box-Cox 変換を用いた推定法についても述べている。そして郊外化現象の進展の中で、輸送費用の低下や所得水準の向上が人口密度勾配を緩やかにしているといういくつかの実証分析の結果を支持している一方で、伝統的な都市などでしばしば観察される不連続な密度勾配では、建物の築年数などを考慮に入れた Vintage モデルを考える必要性を述べている。

本稿では、現代都市の複雑な空間構造を説明する密度関数のモデルに関して、都市化・郊外化現象の過程（プロセス）のなかで展望をおこなう。展望論文の性格上、部分的には McDonald (1989) と重複する記述もあるが、1990年代以降の関連研究の成果についても述べる。最後の節では、今後の研究方向について述べる。

2. 人口密度関数型の選択

Clark が推定した負の指数関数モデルは、その後1960年代において、それを支持するいくつかの実証分析が各地においてなされてきた。また、当時発展しつつあった都市経済学の住宅立地モデルを理論的基礎として、負の指数関数モデルを前提とする土地需要関数の導出についても研究が成されてきた¹⁾。さらに、現実の都市における人口密度分布に対するより良い適合性を求めて、様々な関数形による説明が試みられてきた。それらは McDonald and Bowman (1976) によって、表-1 のようにまとめられている。

表-1 において、負の指数関数モデルは、都市経済学の住宅立地均衡式を用いると、①の負の指数関数モデルは、都市経済学における土地需要関数の価格弾力性が1の場合に対応しており、また②の二項関数モデルの場合は、価格弾力性が1でない場合に導かれる。さらに、都市境界地における土地価格（地代）の機会費用がゼロであることを仮定すると、②の特殊ケースである③の場合に対応していることがわかる。

(1) Mills (1972)。

表－1 人口密度関数型の諸類型

関数名	関数型	符号条件	採用論文の著者
① 指数形式	$D(x) = D_0 \exp[-\gamma x]$	$\gamma > 0$	Clark (1951)
② 二項形式	$D(x) = \alpha [\beta + \gamma(\bar{x} - x)]^\delta$	$\alpha > 0$	Mills (1969)
③ ②の特殊型	$D(x) = D_0(\bar{x} - x)^\delta$	$\delta > 0$	多数
④ 一般正規形式	$D(x) = D_0 \exp[\gamma x + \beta x^2]$	$\beta < 0, \gamma > 0$	Newling (1969)
⑤ 標準化正規形式	$D(x) = D_0 \exp[\beta x^2]$	$\beta < 0$	Tanner (1961)
⑥ ガンマ形式	$D(x) = D_0 x^\alpha \exp[\gamma x]$	$\alpha > 0, \gamma < 0$	Aynvarg (1969)
⑦ ⑥の特殊型	$D(x) = D_0 x^\alpha$	$\alpha < 0$	多数
⑧ 線形	$D(x) = D_0 + \gamma x$	$\gamma < 0$	多数
⑨ 二次形式	$D(x) = D_0 + \beta x^2 + \gamma x$	$\gamma > 0, \beta < 0$	多数
⑩ 特殊形式	$D(x) = D_0 \exp\left[\gamma x + \delta \frac{1}{x}\right]$	$\alpha < 0, \beta > 0$	McMillen and McDonald (1998)

注) McDonald and Bowman (1976) の p.244の Table 1 に基づいている。

\bar{x} は、都市の境界までの距離を示している。

④, ⑤, ⑥については、土地需要の価格弾力性が1でCBDへの通勤費用が距離に関して非線形の場合に導かれることが、Amson (1972) によって標準的な都市経済学モデルとは異なる「拡散モデル」を用いた定式化から示されている。

McDonald and Bowman (1976) は、表－1における10個の関数型を推定した結果、決定係数で見た場合の説明力が最も高いのは⑨であったことが述べられている。そして、単一の指数関数ではなく、多項式の結合型の関数を追求することを示唆している。また、推定された10個の人口密度関数を都市域において積分することで人口を予測し、現実の人口規模との比較検定をおこなっている。

ところで表－1における関数形は、右辺の説明変数については様々な特徴が見出せるが、左辺の被説明変数に関しては固定的である。また、通常、人口密度関数の推定にはクロスセクションデータを用いることから分散の不均一性が予想され、それはt-値の過大推定をもたらすことを意味している。そこで、被説明変数にBox-Cox変換を施すことによって、不均一分散の修正とより望ましい関数型を探索することが求められることになる。Kau and Lee (1976) は、Clarkモデルである①の左辺のBox-Cox変換によって、

$$D^{(\lambda)} = \ln D_0 - \gamma x \quad (2)$$

を推定している。ここで、Box-Cox変換は次の式によって示される。

$$D^{(\lambda)} = \frac{(D^\lambda - 1)}{\lambda} \text{ for } \lambda \neq 0$$

$$= \ln D \text{ for } \lambda = 0 \quad (3)$$

Kau and Lee (1976) は、1970年のアメリカ都市域のデータを用いて、49のうち23の地域で λ が0を超えていることを見出している。非線形である関数は、全ケースの50%近くを占めていると指摘し

ており、Box-Cox 変換によって負の指数関数型と線形の間最適な人口密度関数型が決められることを述べている。

3. 郊外化現象の検定

戦後、多くの都市で見受けられた人口の都市化現象は、次のようなプロセスを経ることが経験的に観測されている。すなわち、都市化の初期段階では人口は都心部に集中するが、次第に郊外の人口が増加し、やがては都心部の人口が減少するとともに都市全体の人口が減少するといった逆都市化現象の現れである⁽²⁾。この都市の発展段階プロセスの第二段階における郊外化現象の進展過程では、都市規模の空間的拡大によっても都市内の人口密度勾配はより緩やかになることが予想される。人口密度勾配が緩やかになる理由は、都市の空間的拡大に加えて、都市経済学の標準的モデルに従えば都市内居住者の所得上昇と通勤費用の低下（遠距離通勤の可能性）などが挙げられる。

Alperovich (1980, 1983) は、人口密度分布形状の変化を推定するために、クロスセクション分析では一定であった都心部密度である定数項： $D(0)$ と勾配パラメータ： γ の2つパラメータについて、時点 t における1人あたり所得 (Y_t)、都市の人口規模 (N_t)、輸送費用の変化を示す時間関数 ($f(t)$) の3つの説明変数を考慮した

$$D_t(0) = D(Y_t, N_t, f(t)) = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 N_t + \alpha_3 f(t)$$

$$\gamma_t = \gamma(Y_t, N_t, f(t)) = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 N_t + \gamma_3 f(t)$$

のような定式化を示している。これを元の負の指数関数モデル(1)に代入して対数をとった式は、

$$\ln D(x) = \ln(\alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 N_t + \alpha_3 f(t)) - (\gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 N_t + \gamma_3 f(t))x \quad (4)$$

の様になり、これは後で述べる可変係数 (VCM) モデルとなっている。

Alperovich は(4)式を非線形推定せずに、都市空間の均衡状態を仮定して、まず都心部の実際の値を用いることで、

$$\ln D(0) = \ln(\alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 N_t + \alpha_3 f(t))$$

を推定し、次にその推定値 \hat{D}_0 を使って

$$\frac{\ln D_t(x) - \ln \hat{D}_0}{x} = -\gamma_0 - \gamma_1 Y_t - \gamma_2 N_t - \gamma_3 f(t)$$

を推定している。Tel Aviv 都市圏域における人口密度の時系列のデータを用いて1961年と1976年の密度勾配に関する推定をおこなった結果、人口密度勾配に対して所得と都市規模のパラメータはともにマイナスで、所得の上昇と都市人口規模の増加が人口密度勾配を緩やかにしていることが認められた。また、時間トレンドの符号はプラスとなり、他の変数との多重共線関係に影響を受けていると思

(2) 中村・田淵 (1996) の第1章「都市と都市化の概念」を参照。

われる。

さて、2時点を比べての密度勾配の変化に関する単純な検定が、Small and Song (1994) によって示されている。彼らは、Los Angeles 市街地におけるいくつかの人口密度関数を推定する中で、単一中心モデルでの郊外化現象にともなう密度関数の勾配パラメータ (γ) の変化に関する検定をおこなっている。比較期間は1970年と80年の2時点で、

$$\Delta \ln D(x) = \ln D_{80}(x) - \ln D_{70}(x)$$

$$\beta = \gamma_{80} - \gamma_{70}$$

とおき、

$$\Delta \ln D(x) = \alpha - \beta x$$

を推定する中で、 $\beta = 0$ という帰無仮説に対して $\beta < 0$ という対立仮説を検定した結果、 $\beta = 0$ という帰無仮説は高い確率で棄却され、1970年から80年にかけて人口と雇用がともに郊外に分散していることが示されている。

人口の郊外化現象が過度に進展すると、中心市街地における人口減少、すなわち都心部の人口空洞化の現象が現れる。この都市中心部における人口密度の低下については、指数部分を2次関数モデルに特定化した表-1の④にある一般正規形式

$$D(x) = D_0 \exp[\gamma x + \beta x^2] \quad (5)$$

と指数関数とべき乗関数を組み合わせた⑥のガンマ形式

$$D(x) = D_0 x^\alpha \exp[\gamma x] \quad (6)$$

によって推定することができる。それぞれの関数の距離に関する微分は、(5)式の場合が、

$$D'(x) = (\gamma + 2\beta x) D_0 \exp[\gamma x + \beta x^2]$$

で、(6)式の場合が、

$$D'(x) = (\alpha + \gamma x) D_0 x^{\alpha-1} \exp[\gamma x]$$

となる。(5)式において $\gamma > 0$ 、 $\beta < 0$ というパラメータの符号条件が満たされれば、都心から $\hat{x} = -\frac{\gamma}{2\beta}$ の地点において人口密度のピークが生じ、この地点より都心部に近いところでは距離と共に人口密度は増加することを意味している。また(6)式でも $\gamma < 0$ 、 $\alpha > 0$ の場合、 $\hat{x} = -\frac{\alpha}{\gamma}$ においてピークが現れることになる。これらの関数型の特徴は、都心部における人口空洞化を説明できるモデルとなっていることである。

次の図-1 a, b は(5)式と(6)式について適当なパラメータを与えて密度分布の形状を示したもので

ある。実際の推定によってうまくパラメータの符号条件が揃いピークが表現できるのは、現実のデータを見てかなりの空洞化が進んでいるような場合に限定される。

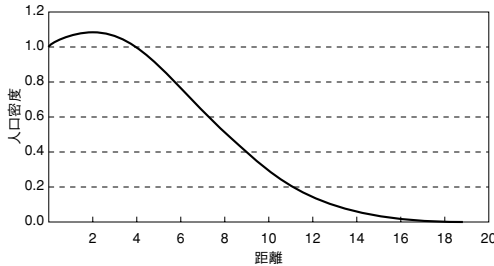


図-1 a $D(x) = D(0)\exp[0.065x - 0.02x^2]$

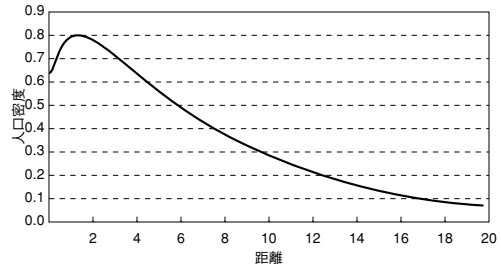


図-1 b $D(x) = D(0)x^{0.15}\exp[-0.16x]$

4. CBD の識別

4. 1 単一の CBD

伝統的な都市経済学のモデルでは CBD は先決的なものとして仮定されており、また人口密度関数の推定においても定数項として扱われてきた。しかしながら、時間とともに都市内の就業構造も変化し、その結果 CBD の位置も必ずしも固定的ではなくなる。また、誤った CBD の特定化は密度関数のパラメータに偏りを発生させ、同時に、モデルの適合性も低下することが予想される。Alperovich (1982) では、いくつかの CBD 候補地について負の指数関数モデルを推定することによって、最も可能性の高い CBD の位置を推測している。誤った特定化によってモデルの適応性が悪くなる一方、異なる都市化水準を表している勾配の違いを正確に解釈できなくなる傾向が強まり、これは時系列分析ではより重要な問題となっている。また Alperovich and Deutsch (1992) では、誤った CBD の特定化による推定値の偏りの程度を統計的に求めている。

これらの考え方に基づき、Alperovich and Deutsch (1994) では、密度関数のパラメータに加えて CBD の位置も同時に推定する方法を提示し、実際にイスラエルの都市で推定している。

まず、CBD の真の位置の平面座標が (x_1, y_1) であると仮定する。(1)式の $D(x) = D_0\exp[-\gamma x]$ の一次元距離の変数は、二次元における一組の (x_i, y_i) のペア変数で表される。それを(1)式に代入すると、次の(7)式が得られる。

$$D(x) = D_0\exp\left[-\gamma\left[(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2\right]^{1/2}\right] \quad (7)$$

ここで、 (x_i, y_i) は国勢調査地域 i の平面座標である。(1)式が OLS による線形推定ができるのに対して、(7)式は非線形推定にならざるを得ないことがわかる。また、(1)式で推定すべきパラメータ数は2つであるのに対して、(7)式では5つのパラメータを推定しなければならない。すなわち、CBD の平面座標 (x_1, y_1) がその追加分である。

Alperovich and Deutsch (1994) は、(7)式の推定に対して、次式で示される尤度関数の値を最大にするようなパラメータを推定している。

$$L(\sigma^2, \ln D_0, \gamma, x_1, y_1) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \times \sum_{i=1}^n \left\{ \ln D(x) - \ln D_0 - \gamma \left[(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \quad (8)$$

ここで、 σ^2 は誤差項の分散である。この5つのパラメータ推定値は(8)式を最大にする $L(\sigma^2, \ln D_0, \gamma, x_1, y_1)$ によって得られる。

この手法を Tel Aviv Yafo のデータに適用した結果、1961年から1987年の間に CBD が元の位置からその北東へ移動したことが明らかにされている。そして、その移動は1961年から1983年の間に起きており、その後は沈静化していることも推定結果から示されている。また、従来の負の指数関数モデルの推定に比べて、1961年における CBD の位置がより正確に推定されている。

この一般的な推定法によって識別された CBD が現実の CBD と完全に一致する場合は、人口密度モデルのパラメータは OLS による推定と同じ値になる。

4. 2 複数の雇用中心地区

都市化が進展すれば、都市機能の拡大によって新たな雇用の中心的地区が形成されることになる。これは副都心的性格をもつ地区であり、そのような地区を複数有する都市（圏域）は多核中心都市と呼ばれている。

McDonald (1987) では、Chicago において、常住人口に対する雇用者数の割合の高さで雇用センターとしての中心地を識別している。具体的には、隣接するすべての区域（ゾーン）よりも雇用密度と雇用・人口比が高い地区について副都心部（subcenter）として定義している。

また、McDonald and Prather (1994) では、表-1のモデルをそれぞれ推定し、誤差項の不均一分散の程度を検定することによって、郊外地域における雇用中心部を識別している。

一般に、このような複数の中心部を有する都市圏における人口密度分布については、Heikkila et al. (1989) によって次のような3種類のモデルが提案されている。

①中心地区間が相互に補完的機能を持っている場合

$$D(x) = \gamma_0 \prod_{i=1}^N f_i(x - x_i)^{\gamma_i}$$

②中心地区間が相互に代替的機能を有している場合

$$D(x) = \max_{i=1}^N [\gamma_i f_i(x - x_i)]$$

③中心地区間が相互に補完的機能と代替的機能の間の場合

$$D(x) = \gamma_0 + \sum_{i=0}^N \gamma_i f_i(x - x_i)$$

ここで、 i は中心地区の番号である。

Small and Song (1994) は、③の定式化で密度関数を負の指数関数に特定化したモデルを Los Angeles 市街地に対して推定している。そこでの推定結果は符号条件を満たしているものの、しばしば上記のような定式化での推定では、変数間の多重共線性と空間的な自己相関の存在によって符号条件が満たされない場合がある。McMillen and McDonald (1998) は、副都心部への距離の逆数を近接性の測度として採用して多重共線性の問題を回避している。これは表-1において⑩で示した

$$D(x) = D_0 \exp \left[\gamma x + \delta \frac{1}{x} \right]$$

の関数型であり、距離の逆数を説明変数として入れた上式を推定することでアクセシビリティの影響の急速な減衰の程度が測られることになる。

5. より複雑な人口密度分布の推定

5.1 Cubic Spline モデル

戦後の高度成長期の都市化現象、その後の郊外化現象、また経済発展に伴って、都市の空間構造において既存都市への一層の人口集中によって都市の範囲が拡大する反面、都心部の居住密度が低下するといった空洞化現象が生じている。郊外化現象には、連続的な都市域の空間的拡大だけではなく、都市の市街地から一定距離をおいたところに住宅団地が開発されるといったスプロール化による新たな郊外地区形成に伴う人口密度の増加なども多くの都市に見受けられる。さらに、郊外地域に一定の人口水準が達せられると、そこには新たな雇用中心地区が形成されることもあり、都市域における副都心的性格を有してくる現象が大都市圏地域においてしばしば見受けられる。このような現代の都市地域における人口密度の複雑な、かつダイナミックな分布形態を説明するには、人口密度データにより弾力的に対応できるモデルの開発と適用が必要となってくる。

先に述べた Newling の指数関数部分の二次関数モデルや Tanner のガンマ型のモデルでは、CBD における人口の空洞化をある程度説明することは可能であるが、人口密度分布がかなり特殊な形になっている場合にしか都心の空洞化として認識できない。さらに、郊外化現象に伴う郊外地域の人口密度の増加や複数中心が存在する場合の密度分布に対しては適用できないという欠点が存在する。そこで、現実の複雑な人口密度分布を説明できるより一般的な関数形が求められることになる。それには、多項形式表現における三次関数を基本とした Cubic Spline 関数の適用が考えられる。これは、三次関数の任意の結合によって被説明変数が上下動する複雑な分布パターンを示そうとするものである。ここで Spline 関数とは、仮定した基本関数の区分 (piecewise) 関数のことである。この特徴は、様々な不連続な動きを描写できるように非常に弾力的となっている点である。

Spline 関数は、任意の点 x_i (以下、分割点という) によって、 x 軸を $i+1$ 個の間隔に分け、それ

ぞれの間隔ごとに散在するポイントに適應できる一組の仮定した基本関数が与えられる方法である。それぞれの間隔の中では関数が連続性を保つが、各間隔の関数のパラメータは異なる値で得られる。そのため Spline 関数は不連続になる。それに対しては2つの対処方法がある。1つは、分割点での不連続性には何の制約もなく、分割点で各種類の不連続性を認めることである。もう1つは、分割点で関数とその導関数に制約をかけることである。制約を付ける定式化によって、関数が全区間で連続性を保ち、計量分析における操作性が向上することになる。

Spline 関数の中でも代表的な関数は Cubic Spline 関数と言われるもので、これは Suits et al. (1978) によって各間隔に用いる基本関数として三次関数が提示されている。一例として、3つの間隔に分ける場合は、適應する Cubic Spline 関数は次の(9)式のように表すことができる。

$$D(x) = \left[a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3 \right] D_1 \\ + \left[a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3 \right] D_2 \\ + \left[a_3 + b_3(x - x_2) + c_3(x - x_2)^2 + d_3(x - x_2)^3 \right] D_3 \quad (9)$$

ここで、 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ のとき D_i が1になり、他の場合は D_i が0となる。

(9)式では、各分割点 x_i のところで関数およびその導関数は非連続になる。しかしながら、分割点における左右両関数の係数に次の(10)式のような制限を加えることによって、それを事前に防ぐことができる。

$$a_2 = a_1 + b_1(x_1 - x_0) + c_1(x_1 - x_0)^2 + d_1(x_1 - x_0)^3 \\ b_2 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_0) + 3d_1(x_1 - x_0)^2 \\ c_2 = c_1 + 3d_1(x_1 - x_0) \\ a_3 = a_2 + b_2(x_2 - x_1) + c_2(x_2 - x_1)^2 + d_2(x_2 - x_1)^3 \\ b_3 = b_2 + 2c_2(x_2 - x_1) + 3d_2(x_2 - x_1)^2 \\ c_3 = c_2 + 3d_2(x_2 - x_1) \quad (10)$$

さらに各区間が等間隔の場合、すなわち、 $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2)$ であるとき、ダミー変数を新たに定義することによって、(10)式は次の(11)式のように単純化できる。

$$D(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3 \\ + (d_2 - d_1)(x - x_1)^3 D_1^* + (d_3 - d_2)(x - x_2)^3 D_2^* \quad (11)$$

ここで新たに定義にしたダミー変数 D_i^* は、 $x \geq x_i$ のときに1になる。すなわち、 x が x_i まで達するまでは $D_i^* = 0$ あり、それ以降は $D_i^* = 1$ となる。これによって、分割点が増えても簡単な式によってモデルが記述できるようになっている。

Anderson (1982, 1985) は、(11)式を基本とする Cubic Spline モデルを人口密度分布へ適用している。都心からの各距離間隔ごとに三次関数を当てはめるため、負の指数関数より人口密度データへの適應性が高いと主張している。

1970年におけるアメリカの30都市に関する研究では、各都心から都市の境界までの距離の33.3%と66.7%のところそれぞれ分割点を入れ、距離を3等分にして推定をおこなっており、主に次の2つの実証結果が得られている。

- 人口密度のピークは都心から少し離れているところにある。最も離れている Detroit では、都心から4マイルあたりにある。
- 郊外に近づくところには人口密度の第二のピークが存在する。

さらに、Anderson は Cubic Spline 関数による人口密度の距離に対する変化率は、符号も大きさも距離によって大きく変化することが、負の指数関数より人口密度データへ適応している特徴であると指摘している。

一般に、人口密度の距離に対する変化率は、

$$\frac{dD(x)/dx}{D(x)}$$

と定義できる。ここで(1)式の $D(x) = D_0 \exp[-\gamma x]$ のような負の指数関数の場合は、 $\frac{dD(x)/dx}{D(x)} = -\gamma$ となり、負の指数関数による人口密度の距離に対する変化率が常に一定である。これに対して、Cubic Spline 関数による人口密度の距離に対する変化率は、符号も変化率の大きさも距離によって変化し、実際の人口密度データにより弾力的に対応していると言えよう。

Cubic Spline モデルの関数構成をさらに一般化するために、Anderson (1985) では(11)式の密度関数における従属変数について Box-Cox 変換を施す次の(12)式を推定している。

$$\begin{aligned} \frac{D(x)^\lambda - 1}{\lambda} &= a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 \\ &+ d_1(x - x_0)^3 + \sum_{n=1}^k (d_{n+1} - d_n)(x - x_n)^3 D_n^* \end{aligned} \quad (12)$$

最尤法を用いて最適な λ を推定し仮説検定をおこなった結果、ほとんどのケースにおいて、 $\lambda = 0$ の仮説が棄却される結論となった。これによって、伝統的な指数関数型が Detroit の人口密度分布データに関しては適切でないことが明らかになっている。また別の検定結果では $\lambda = 1$ という仮説が棄却できず、 λ の推定値が1に近いことから関数構成が線形に近いことを示している。これらの推定結果により、対数変換しない Cubic Spline モデルを適切な関数型として、(11)式によって Anderson はその後の分析を進めている。

Alperovich (1995) は、人口密度分布の研究に Spline 関数を用いることの欠点を指摘している。ここでは、分割点の位置と間隔の数を決めるのには特別な基準がなく、外生的に決められていることが Spline 関数の固有の限界であると述べている。

Anderson (1982) は、Cubic Spline 関数の人口密度への適用に際して推定された距離の係数を示したが、係数が有意であるかどうかは示さなかった。Anderson (1985) は484の標本を用いたが、2/3以上の係数が有意ではなかった。Alperovich (1995) も Anderson と同じく(11)式を基本とする Cubic Spline 関数を推定したが、係数の t-値と決定係数が非常に低かった。これらのことから、Alperovich

は Cubic Spline 関数を用いる推定が必ずしもそれが最も優れているというわけではないという結論を得ている。

5. 2 Switching Regression モデル

都市の発展に伴う建物の建設や減失、また土地利用規制などによって、人口密度が距離に関してスムーズに変化するのではなく、ある地点においてジャンプ（シフト）することによって関数が不連続になっているようなことが現実の人口密度分布にはしばしば見受けられる。その場合、連続的なスプライン関数でこの現象を表現するのは困難となり、パラメータが途中でスイッチするモデル、すなわち Switching Regression の適用が1つの可能性として考えられる。

Breuckner (1981, 1986) は、人口密度関数における不連続性の存在を、建物の築年数を考慮した Vintage Model を構築することによって説明できることを示している。都市が中心から外延部に開発されていき、また建物の再開発を考慮に入れることで鋸歯型の密度分布形状、すなわち不連続な密度分布が現れることを示唆している。

いま、実際の推定に当たって個別データ $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ は国勢調査地域の都市中心からの距離の順に配列されているものとしよう。都心部からの距離が $0 \leq x_i \leq x'$ において、

$$\ln D(x) = a_1 - \gamma_1 x_i + \varepsilon_1$$

であり、 $x_i > x'$ では、

$$\ln D(x) = a_2 - \gamma_2 x_i + \varepsilon_2$$

となっていると仮定しよう。ここで、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は平均ゼロ、分散が σ_1^2, σ_2^2 で、相互に独立に正規分布する誤差項である。このとき対数尤度は、

$$\begin{aligned} \ln L = & -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{x'}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{n-x'}{2} \ln \sigma_2^2 \\ & - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{x'} (\ln D(x) - a_1 - \gamma_1 x_i)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{i=x'+1}^n (\ln D(x) - a_2 - \gamma_2 x_i)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

2つの式それぞれの OLS によって、ある分割点 x' における α, β, σ^2 の最尤推定量が得られることから、それらを用いると(13)式における右辺の最後2つの項は、 $-\frac{n}{2}$ と書き改められることになり、その結果(13)式の対数尤度関数は、

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}_1^2 - \frac{n-x'}{2} \ln \hat{\sigma}_2^2$$

となる。

分割点（不連続点）の数が既知の場合は、最適なスイッチ点は上記の尤度関数を最大にする地点である。しかしながら、一般には不連続点が事前に分かっている場合は少なく、通常はデータから推測

しなければならない。そこで、Breuckner は追加される各不連続点に対して尤度比検定を実施して不連続点の数を決定している。すなわち、新しい不連続点を追加することで尤度比検定から有意に説明力が改善されると判断される場合にその点をスイッチ点として加えられるのである。

5.3 Varying Coefficient (可変係数) モデル

CBD を外生的な点として位置づけ、そこでの就業者は同一所得の下で、すべてその周りから通勤してくるといった伝統的な住宅都市モデルにおいては、住宅スペースの逆数として定義される人口密度の分布を説明する変数は、最終的には都心からの距離のみとなる。

しかし、現実の都市の場合は、土地は均質ではなくその物理的特性も場所によって異なってくることから CBD からの距離とは独立に人口密度に影響を与えることが考えられる。また、土地利用規制（ゾーニング）の存在も人口密度に影響を与える。さらに理論モデルでは同一と仮定されている所得水準に関しても現実における場所による異なりなども人口密度に影響を与える可能性がある。そして、各地区の開発時期やそこにおける建物の vintage など人口密度に影響を与えると考えられる。これらの変数の存在は、密度関数における追加的説明変数として人口密度をシフトさせる場合や距離勾配を変化させる場合がある。

Johnson and Kau (1980) は、このような考えの下に「1-パラメータ」の負の指数関数モデルを可変係数モデル (Varying Coefficient Model: VCM) に拡張している。ここでは、単に定数項に社会経済変数を加えるだけでなく、基本モデルの右辺にあるすべての項のパラメータに社会経済変数を取り入れたモデルとなっている。

(1)式の $D(x) = D_0 \exp[-\gamma x]$ のパラメータにおいて D_0 と γ が一定ではなく、

$$\ln D_0(z_i) = \sum_{i=1} \alpha_i z_i$$

$$\gamma(z_i) = \sum_{i=1} (\beta_i z_i + \beta'_i z_i^2)$$

と定式化している。ここで二次形式となっているのはかなり任意的なものである。また、実際にパラメータの変化を説明する変数としては、分析が複数の都市39を対象としたプーリング・データであることから、都市内の構造変化に関しては、①地区における公共運輸を利用する通勤者の割合、②地区の所得を採用し、都市間のパラメータの異なりを説明する変数としては、③都市人口が急増した時点からの経過年と、④都市の人口を採用している。推定結果から、以下の結論が得られている。推定された二次関数の性格から、

- 公共交通機関の利用者割合に関しては、32%程度までの利用者増加に対して密度勾配は緩やかになり、それを超えると密度勾配がプラスに転じる。
- 所得水準が\$37,500に至るまでは所得水準の上昇は人口密度勾配を急にしますが、それを超えると所得上昇は密度勾配を緩やかにする。
- 開発歴史が90年までの都市では、古い都市ほど人口密度勾配が緩やかになっているが、90年を超える開発歴史を持つ都市での密度勾配は古い都市ほど急になる。

- 人口が1900万人までの都市については人口規模の増加が密度勾配を緩やかにするが、その規模を超えると、勾配はプラスに転じたり、また絶対値として小さくなる可能性を持っている。

Johnson and Kau は、社会経済変数を導入した VCM 型人口密度関数の推定は、その適合度の高さから予測と政策シミュレーションに貢献できるとしている。特に、公共交通機関の利用割合や所得などの地区固有の社会経済変数を導入することによって、目的別の予測ができることを強調している。

Lahiri and Mumrich (1983) は、Johnson and Kau の VCM について、被説明変数の Box-Cox 変換による一般化をおこなっている。ここでは Johnson and Kau と同じデータベースを利用して、Box-Cox 変換パラメータである λ の推定と誤差項の不均一分散の修正とが同時におこなわれており、 $\lambda = 0$ の負の指数構成は棄却されている。しかしながら、推定上の修正があつたにもかかわらず Johnson and Kau と大きく異なる結論は得られていない。

Zheng (1991) も VCM を用いて東京大都市圏における空間構造の変化の要因を特定している。Zheng は(11)式の Cubic Spline 関数を用いて東京大都市圏における人口密度関数を推定し、東京大都市圏における空間構造の変化の分析をおこなっている。Cubic Spline 関数モデルに社会経済変数を取り入れる VCM では Cubic Spline 関数の本来の特性をそこなうことから、推定で得られた空間構造の変化の凹凸要因を特定するにあたって VCM を用いて分析している。

そこで、まず次の(14)式のような人口密度に関する異時点間の変化率を説明するモデルを仮定する。この式の意味するところは、人口密度の変化率は、都心からの距離によって異なっているということである。

$$\frac{\Delta D(x)}{D(x)} = \alpha + \beta \ln x \quad (14)$$

次に、(14)式のパラメータである α と β に関して、一人当たり所得と自動車登録税といった郊外化現象の要因と思われる社会経済変数を取り入れ、都市の空間構造における変化要因を特定化している。

$$\alpha = a_1 + b_1 \frac{\Delta z_1}{z_1} + c_1 \frac{\Delta z_2}{z_2} \quad (15)$$

$$\beta = a_2 + b_2 \frac{\Delta z_1}{z_1} + c_2 \frac{\Delta z_2}{z_2} \quad (16)$$

ここで z_1 と z_2 はそれぞれ、一人当たり所得と自動車登録税である。(15)式と(16)式を(14)式に代入して推定の結果、所得の上昇率と通勤コストの減少率が大きくなると都心部の人口密度が減少する一方、緑辺部の人口密度が大きくなる結論が得られ、初めて Cubic Spline モデルによって人口密度の空間構造を推定した分析結果に対する実証的裏付けを示した結果となっている。

このように都心からの距離以外の社会経済変数を定数項もしくは密度勾配のパラメータ変化を説明するような形で取り入れることによって、モデルの適合度は大きく高まってきた。しかしながら、ここでは説明変数の定式化に対して基準がなく任意的に社会経済変数を選択し導入している傾向が見受けられる。

これに対して Anderson (1985) は、人口密度を定義に基づき、次のように人口、全面積、住宅地

面積、床延べ面積の4つの要素に細分化して人口密度分布の要因を検討する枠組を提案している。

まず、人口密度に関しては、住宅地面積を介在して

$$\text{人口密度} = \left[\frac{\text{人口}}{\text{住宅地面積}} \right] \times \left[\frac{\text{住宅地面積}}{\text{全面積}} \right]$$

と定義する。次に、右辺第1項の住宅地における人口密度（Net Density）に関しては、

$$\left[\frac{\text{人口}}{\text{住宅地面積}} \right] = \left[\frac{\text{人口}}{\text{延床面積}} \right] \times \left[\frac{\text{延床面積}}{\text{住宅地面積}} \right]$$

のように分解できる。

人口密度がこれらの要素の変化およびその相互効果によって変化するため、人口密度の分析は、要素ごとの研究によって展開すべきことを強調している。Anderson（1985）では、これに関する定式化はおこなわず、人口密度の空間構造分析の方向だけを示唆している。

6. データの種類と問題点

6.1 データの種類

人口密度研究に用いられる密度データは、研究目的によってもその内容が異なってくる。ここでは図-2に示したような分類に基づいて、対象密度変数、分析対象エリア、そしてデータの単位といった3つの分類に沿って説明する。

都市の空間構造の推移を見るときには、常住人口密度と就業者密度の2つの指標でとらえることができる。生活の場として都市構造を見るのであれば、常住人口密度が適切であるが、経済活動の観点から都市の空間構造を考察するのであれば、就業者密度が望ましいことになる。

従来の推定は、ほとんど常住人口密度のデータに基づいている。しかし、都市化の各段階において、常住密度と就業者密度の空間分布は異なる構造を示している。その違いの比較が中心市街地や就業地形成の観点からも重要な課題になると考えられる。

また、人口密度に関するほとんどの研究が総人口密度を対象としている。そこでは、土地面積の測定は住宅利用に限らず、すべての土地利用を含めている。純人口密度は、住宅用地の1単位あたりの

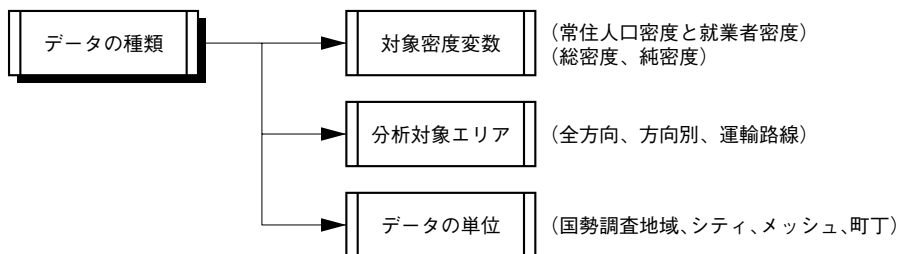


図-2 人口密度のデータの種類

人口密度を指している。負の指数関数が総人口密度データより純人口密度データに適応している指摘もあるが、土地利用形態の総合関係を考慮してない点もあるため、純人口密度を対象とする研究がごく少数となっている。

密度関数を推定する際に、全方向を対象とした推定が一般的であるが、現実の都市においては地形上の差異の存在や方向別に関係が異なっていることがしばしば見られる。そのため、人口密度が都心を中心に同心円に分布しているのではなく、都心からの方向別によって異なる形状を呈していることから、方向別による推定もしばしばおこなわれる。

Alperovich (1995) は方向別推定に関して、これとは若干違う動機を主張している。人口密度分布をうまく説明できるモデル、つまりフレキシブルな関数型が見あたらないのは、その関数型に対して当てはまらない傾向にある観測値が存在するためであると主張している。それは、周辺の一部の土地利用開発パターンがモデルと一致しないケースと考えられる。Alperovich (1995) の研究では Tel Aviv Yafo において南北での土地利用開発パターンが異なっている。北部では都市構造の理論によって人口密度が適切に説明されるが、南部の沈滞している部分ではうまく説明できない。結果として、全サンプルを用いてモデルを推定する際に誤りのある結論になる。サンプルのバイアスを修正するため、Alperovich は土地利用の情報を用いて、事前にモデルに適合しない南部の観測値を排除している。推定によって、土地利用分布などの追加情報を用いてサンプル選択のバイアスを取り除くアプローチは好ましい手法であることが確認できる。

このほか、運送路線の配置の影響を重視し、運送路線に沿ってデータを分ける研究もある。Anderson (1985) は Detroit 地域における主な運送路線に沿って、3つのデータセットに分けている。各年度において3つの方向別における Cubic Spline モデルを推定し、密度分布の方向別における時系列の変化を示している。Zheng (1991) も同様な目的で、東京大都市圏において3つの主要な鉄道路線に沿ってサンプルを取り、推定をおこなっている。

6. 2 サンプリング・バイアス

負の指数関数を推定する際に、習慣的には(1)式の $D_{(x)} = D_0 \exp[-\gamma x]$ の両側に自然対数をとった式について推定し、そこでは $\ln D_0$ と γ が OLS による最良不偏推定量として考えられていた。Frankena (1978) は、国勢調査データが人口数の接近する地域に対する集計であり、人口密度の確率的な観測値ではないことに気づき、国勢調査地域を用いることによるサンプリングのバイアスを指摘している。

Frankena は国勢調査地域が次の2つのルールに従って、都市から一定の距離にある地区の集計により構成されると仮定する。(a)国勢調査地域ごとに集計に用いる地区が同じ密度を有している。(b)集計された各国勢調査地域の人口がほぼ同じである。

そのことから、各国勢調査地域の人口 N_j 、次のような式より得られる。

$$N_j = A_j D_j \tag{17}$$

ここで、

A_j : 国勢調査地域 j の面積

D_j : 国勢調査地域 j の人口密度

(17)式は、次の(18)式のように変形できる。

$$A_j = \gamma D_j^{-1} + \varepsilon_j \quad (18)$$

(18)式から、都心から一定の距離において、人口密度の高い地区から集計された国勢調査地域の面積が人口密度の低い地区から集計された国勢調査地域のより小さいことがわかる。

人口密度の低い地区で集計された各国勢調査地域は地区の数を多く含み、人口密度の高い地区から集計された国勢調査地域が含んでいる地区より多い。そのため、人口密度の低い地域は人口密度の高い地域より高度に集計されているので、人口密度の低い地域は国勢調査地域の観測値では過小評価されることになる。結果として、地域レベルのデータでは、人口密度の高い地域を過大評価する一方、人口密度の低い地域を過小評価する。

そのため Frankena は国勢調査地域の面積をウェイトとしておくことによって、 $\ln D_0$ と γ の推定値のバイアスを修正することを提案している。加重回帰のパラメータは OLS によって推定する。したがって(18)式を考慮した(1)式の具体的な推定式は次のようになる。

$$A^{1/2} \ln D(x) = A^{1/2} \ln D_0 - \gamma A^{1/2} x \quad (19)$$

ここで、 A は国勢調査地域の面積である。

OLS は、次の(20)式が示すように面積のウェイトをつけた残差の二乗和を最小にする。

$$\sum_j A_j (\ln D_j(x) - \ln D_0 - \gamma x)^2 \quad (20)$$

この手法は、現在でもよく使われている。

Anderson (1982, 1985) は、(11)式の Cubic Spline モデルと(12)式の Box-Cox 変換 Cubic Spline モデルを推定する際に、国勢調査データによるバイアスを回避するために、それぞれ式の両側に国勢調査地域の面積をウェイトとして加え、バイアスを修正している。具体的な推定式は次の2式によって示されている。

$$\begin{aligned} D(x)A^{1/2} &= a_1A^{1/2} + b_1A^{1/2}(x - x_0) + c_1A^{1/2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + d_1A^{1/2}(x - x_0)^3 + \sum_{n=1}^k (d_{n+1} - d_n)A^{1/2}(x - x_n)^3 D_n^* \\ D(x)^\lambda A^{1/2} &= a_1A^{1/2} + b_1A^{1/2}(x - x_0) + c_1A^{1/2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + d_1A^{1/2}(x - x_0)^3 + \sum_{n=1}^k (d_{n+1} - d_n)A^{1/2}(x - x_n)^3 D_n^* \end{aligned}$$

Alperovich (1995) の中でも、データのバイアスを回避するために同じ処置をとっている。

7. おわりに

伝統的な負の指数モデルによる人口密度関数の推定結果を過去の論文で見ると、決定係数において40%から50%の程度のもが多く見られる。この値は対象都市にもよるが、一般にデータが新しいほど、また都市の歴史が古いほど決定係数は低下している。決定係数が50%を下回れば、逆に負の指数関数では説明できない部分が50%以上あるということである。それは、おおざっぱに都市空間を眺めれば、距離に対して減衰関数になってはいるが、途中に準雇用中心地区があったり、また郊外に人口が増加していたりして、人口密度は都心からの距離と共にスムーズには減衰しない部分が少なからずある。

このような人口密度の高低の変化を距離だけで説明しようとする、三次関数の連続的組み合わせである Cubic Spline が優れている。分割点の位置や数の決め方、さらに等間隔制約を取り除くと推定上の煩雑になるといった問題は残るが、都心からある一定方向に対する密度分布を説明するには、極めて当てはまりが高い関数型と言えよう。

しかしながら、我々は単に当てはまりが良ければ、それで十分であるとは決して言えない。Cubic-Spline 関数で説明された凹凸の形状になっている経済学的要因を分析する必要がある。それは、Zheng (1991) によってなされた人口密度勾配の変化率に関する要因分析のようなことを意味している。

もう1つは、人口密度を都心からの距離のみで表現することの限界である。もとよりこれは標準的な都市経済学における住宅都市のモデルから都心距離に関して減衰する密度関数との整合性が保たれているのであって、実際の土地利用を見ると、1区画の中でも複数の土地利用形態がなされていることは頻繁にある。すなわち、都心から同一距離の立地点においても異なる土地利用形態が存在するのである。

いま、CBD からの距離が x である区画を考え、そこにおいて

$l_i(x)$: 距離 x の地区における第 i 種土地利用の面積

$n_i(x)$: 距離 x の地区における第 i 種土地利用に対応する単位面積あたりの居住者数

$L(x)$: 距離 x の地区における総面積

とする。

すると地点 x における人口密度は、

$$D(x) = \frac{1}{L(x)} \left(\sum_{i=1}^n n_i(x) l_i(x) \right) \quad (21)$$

と定義できる。さらに、そこにおける第 i 種土地利用面積の割合を

$$s_i(x) = \frac{l_i(x)}{L(x)}$$

とすると、人口密度の定義式(21)は

$$D(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) s_i(x) \quad (22)$$

と書き換えられることになる。

ここで(22)式の右辺に関して、次のような関数関係を仮定する。

$$D(x) = \sum_{i=1}^n n_i(u) s_i(x) = f\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i x) s_i(x)\right) \quad (23)$$

(23)式では、地点 x における居住者数が都心からの距離の関数になっていることを前提としている。さらに(23)式の関数形について、左辺を Box-Cox 変換、右辺を線形として

$$\begin{aligned} \frac{D(x)^\lambda - 1}{\lambda} &= \alpha_0 + \beta_0 x + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i x) s_i(x) \\ &= \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(x)\right) + \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i s_i(x)\right) x \end{aligned} \quad (24)$$

と特定化すると、これは伝統的な負の指数モデルの Box-Cox 変換を用いた一般形である

$$\frac{D(x)^\lambda - 1}{\lambda} = D_0 - \gamma x$$

の勾配パラメータ γ に関する変化係数モデル (VCM) に対応していることがわかる。また(24)式において、Box-Cox 変換パラメータ γ が 0 の場合は、

$$\begin{aligned} \ln D(x) &= \alpha_0 + \beta_0 x + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i x) s_i(x) \\ &= \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(x)\right) + \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i s_i(x)\right) x \end{aligned}$$

となり、伝統的な負の指数型の VCM となる。

このような土地利用変数を考慮に入れた人口密度関数のモデルは、Harrison and Kain (1974) や Brueckner (1981) の言う都市開発の歴史的側面を人口密度に反映させたモデルと関係がある。具体的に都市開発の変数を密度関数に入れたモデルとしては、Yacovissi and Kern (1995) によって、 Y_{ij} をゾーン i における時期 j に建設された建物の割合として、

$$\ln D_i(x) = \ln D_0 + \gamma x + a_1 Y_{i1} + a_2 Y_{i2} + \dots + a_n Y_{in}$$

あるいは、もっとフレキシブルな形で

$$\begin{aligned} \ln D_i(x) &= \ln D_0 + a_1 Y_{i1} + a_2 Y_{i2} + \dots + a_n Y_{in} \\ &\quad + (\gamma + b_1 Y_{i1} + b_2 Y_{i2} + \dots + b_n Y_{in}) x \end{aligned}$$

が示されている。後者の定式化は距離に対する勾配パラメータも変化させる VCM となっている。

このモデルを推定した結果、決定係数は決して高い値ではなかったが、それでも動学的土地利用モデルを実証する第一歩となっている。

参 考 文 献

- Amson, J. C. (1972) 'The Dependence of Population Distribution on Location Costs,' *Environment and Planning A*, Vol. 4, pp. 163–181.
- Alperovich, G. (1980) 'Determinants of Population Density Gradient in Tel Aviv Metropolitan Area,' *Urban Studies*, Vol. 17, pp. 185–192.
- Alperovich, G. (1982) 'Density Gradients and the Identification of the Central Business District,' *Urban Studies*, Vol. 19, pp. 311–320.
- Alperovich, G. (1983) 'Determinants of Urban Population Density Functions : A Procedure for Efficient Estimates,' *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 13, pp. 287–295.
- Alperovich, G. (1995) 'The Effectiveness of Spline Urban Density Functions : An Empirical Investigation,' *Urban Studies*, Vol. 32, pp.1537–1548.
- Alperovich, G. and Deutsch, J. (1992) 'Population Density Grandients and Urbanization Measurement,' *Urban Studies*, Vol. 29, No. 8, pp.1323-1328.
- Alperovich, G. and Deutsch, J. (1994) 'Joint Estimation of Population Density Functions and the Location of the Central Business District,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 36, pp. 239–248.
- Anderson, J. (1982) 'Cubic Spline Urban Density Functions,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 12, pp. 155–167.
- Anderson, J. (1985) 'The Changing Structure of a City : Temporal Changes in Cubic Spline Urban Density Patterns,' *Journal of Regional Science*, Vol. 25, pp. 413–425.
- Anderson, J. (1985) 'Estimating Generalized Urban Density Functions,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 18, pp. 1–10.
- Brueckner, J. (1981) 'Testing a Vintage Model of Urban Growth,' *Journal of Regional Science*, Vol. 21, pp. 23–36.
- Brueckner, J. (1986) 'A Switching Regression Aanalysis of Urban Population Densities,' *Journal of Urban Economics*, Vol.19, pp. 174–189.
- Clark, C. (1951) 'Urban Population Densities,' *Journal of Royal Statistics Society, Series A*, Vol. 114, pp. 490–494.
- Harrison, D. and Kain, J. F. (1974) 'Cumulative Urban Growth and Urban Density Functions,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 1, pp. 61–98.
- Heikkila, E., Gordon, P., Kim, J. and Richardson, H. (1989) 'What Happened to the CBD–Distance Gradient?: Land Values in a Policentric City,' *Environment and Planning A*, Vol. 21, pp. 221–232.
- Frankena, M. (1978) 'A Bias in Estimating Urban Population Density Functions,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 5, pp. 35–45.
- Johnson, S. and Kau, J. (1980) 'Urban Spatial Structure : An Analysis with a Varying Coefficient Model,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 7, pp. 141–154.
- Kau, J., Lee, C. and Chen, R. (1983) 'Structural Shifts in Urban Population Density Gradients : An Empirical Investigation,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 13, pp. 364–377.
- Lahiri, K. and Numrich, R. (1983) 'An Econometric Study on the Dynamics of Urban Spatial Structure,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 14, pp. 55–79.
- Macauley, M. (1985) 'Estimation and Recent Behavior of Urban Population and Employment Density Gradients,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 18, pp. 251–260.
- McDonald, J. and Bowman, H. (1976) 'Some Alternative Urban Population Density Functions,' *Journal of Urban Economics* , Vol. 3, pp. 241–252.
- McDonald, J. (1987) 'Econometric Studies of Urban Population Density : A Survey,' *Journal of Urban Economics* , Vol. 26, pp. 361–385.
- McDonald, J. (1987) 'The Identification of Urban Empolyment Subcenters,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 21, pp. 242–258.
- McMillen, D. (1994) 'Vintage Growth and Population Density : an Empirical Investigation,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 36, pp. 333–352.
- Mills, E. (1972) '*Urban Economics*,' Scott, Foresman, Glenview, Ill.
- Newling, B. (1969) 'The Spatial Variation of Urban Population Density,' *Geographical Review*, Vol. 59, pp. 242–252.
- Small, K. and Song, S. (1994) 'Population and Employment Densities : Structure and Change,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 36, pp. 292–313.
- Suits, D., Mason, A. and Chan, L. (1978) 'Spline Functions Fitted by Standard Regression Methods,' *Review of Econonimcs and Statistics*, Vol. 60, pp. 132–139.
- Wang, F. and Zhou, Y. (1999) 'Modeling Urban Population Densities in Beijing 1982–90 : Suburbanization and its Causes,' *Urban*

Studies, Vol. 36, pp. 271–287.

Yacovissi, W. and Kern, C. R. (1995) 'Location and History as Determinants of Urban Residential Density,' *Journal of Urban Economics*, Vol. 38, pp. 207–220.

Zheng, X. (1991) 'Metropolitan Spatial Structure and its Determinants : A Case Study of Tokyo,' *Urban Studies*, Vol. 28, pp. 87–104.

中村良平・田淵隆俊 (1996) 『都市と地域の経済学』, 有斐閣ブックス.

中村良平・李 健 (1999) 「都市空間における土地利用変数を用いた人口密度関数の推定」岡山大学大学院文化科学研究科紀要, 第 8 号, pp. 1–11.

An Econometric Study on the Urban Population Density Functions : A Survey

Ryohei Nakamura and Jie Li

Since the seminal work by Clark (1951), a number of researches on urban population density have been appeared in several journals. In 1989 McDonald conducted a survey on the econometric study of urban population density functions. In the review he recommended the estimation technique pointed by Frankena (1978) and the use of Box–Cox transformation for choosing an optimal functional form. He also addressed to the model and estimation of beyond the distance–density functions such as varying parameter model.

This paper begins in the second section with a choice of functional form. Sections 3 and 4 review the estimation model of suburbanization and the identification of the CBD including multi–center case. Recently more complicated population distributions are found in the real urban areas. Thus, more sophisticated models are needed to explain the real population distribution. In section 5 three estimation models ; cubic–spline, switching regression, and varying coefficient models are reviewed and in the varying coefficient model we propose theoretical foundations for the estimation of varying parameter model. In section 6 we describe data problems concerning population density estimation and estimation bias when we use census tract data. Finally, section 7 states a possible direction of the further research.