

氏名	安東 雅訓
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博乙第4419号
学位授与の日付	平成26年 3月25日
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 (学位規則第5条第2項該当)
学位論文の題目	整数の分割の母関数と組合せ論
論文審査委員	教授 山田 裕史 教授 吉野 雄二 准教授 鈴木 武史

学位論文内容の要旨

「ある数を自然数の和で表す方法が何通りあるか？」という素朴な数学がある。本論文では自然数の和による表示「分割」とその総数「分割数」を定義し、その代表的な例・命題を紹介している。この整数の分割と呼ばれる数学は整数論、群の表現論を中心とした多くの分野に現れ、それらの分野での結果から得られる定理も多い。しかし定義自体は組合せ論であり、背景を隠すわけではないが本論文中での証明は、写像を構成し分割の間に対応をつける組合せ論での証明を主としている。また整数の分割は題目にある母関数と呼ばれる q -級数とも相性がよくその式変形による証明も扱っているが、それも補助の意味が強く、間の組合せ論が想像できないような式変形はできるだけ避けている。

「 $\prod a_\lambda = \prod b_\lambda$ 」の一般化となる分割のフック長の積に関する公式、内村型 q -恒等式と呼ばれる q -恒等式の組合せ論的な理解と一般化、岡山大学山田裕史教授、鈴木武史准教授との共同研究であるグレイシャー対応に関するウエイトの間の積の一致を主結果としている。どの結果も分割のヤング図形を用いた組合せ論として表される。(3つ目の結果に現れる図形は正確にはヤング図形でないが。)

論文審査結果の要旨

本論文は整数の分割とその母関数, 組合せ論を扱っており, 序章 (第1章), 結語 (第10章), 謝辞 (第11章) を除いて8つの章から成っている。

第2章では整数の分割に関する用語を定義し, 代表的な例とそれに関する基本的な命題を紹介している。第3章において整数の分割の組合せ論のモデルであるヤング図形とその用語を定義する。第4章で母関数と呼ばれる「組合せ論的な対象の情報を保存した式」を導入し, その考え方, 扱い方を見る。第5章は「公式集」と銘打たれ, いくつかの基本的な式変形が紹介されている。第6章では「 p -コア」と呼ばれる分割とその生成の過程で使われる「 p -アバカス」について詳述される。続く第7,第8,第9章が本論であり, 学位申請者自身の結果が述べられている。まず第7章で「フック長公式」が示される。簡単なものであるが, 今までの研究では盲点であったようで, 申請者の目の付け所の鋭さが浮き彫りにされている。第8章の内容は主査である山田裕史, および副査の鈴木武史との共著論文で得られたものである。古典的によく知られた「グレイシャー対応」に付随してある種のウェイトを導入。それらの積が不思議な性質を持つという結果である。本論文では申請者自身の寄与の度合いが強い組合せ論的側面が重視されているが, 研究の動機はヘッケ環のモジュラー表現からきていることを注意したい。最後の第9章では「内村型 q -恒等式」の一般化が扱われている。簡単な約数関数の q -恒等式から始まり, ヤング図形を分解したり合成したりして新たな恒等式を導いていく手際はまさに職人芸である。

鮮やかな組合せ論が次々に展開されていく本論文は見事の一語に尽きる。もちろん単なる組合せ論で終わらせてはならず, 表現論的な意味付け, 位置付けが不可欠であるが, それは申請者自身も含めた今後の研究課題である。いずれにしても, 本論文の著者は博士 (理学) の学位を得るに十分な学識と経験を備えている。