歪多項式環と種々の環拡大

山中　聡

2015年3月

岡山大学
大学院自然科学研究科（博士課程）

序 文

本論文では分離拡大, 平田分離拡大, G-ガロア拡大, 弱分離拡大, 弱擬似分離拡大等の種々の環拡大について考察する. その上で主として歪多項式環のモニックな多項式によって生成されるイデアルによる剰余環として現れる環拡大を取り扱う. 歪多項式環における分離多項式や平田分離多項式, ガロア多項式等の研究は岸本量夫, 永原賢, 宮下庸一, 池畑秀一, G. Szeto らにより幅広く研究されてきた. とりわけ岸本は特殊な形の多項式について研究し, 永原は 2 次の多歪項式について徹底に考察した. また宮下により一般次数の歪多項式の研究の礎となる手法が確立され, これをもとに池畑や Szeto らは歪多項式環における分離多項式, 平田分離多項式, ガロア多項式等の更なる研究を行ってきた.

本論文は四章からなる. まず第一章では宮下庸一により与えられた歪多項式環における分離多項式と平田分離多項式に関する必要十分条件 (宮下の定理) の別証明を与える. すでに筆者と池畑秀一により自己同型型および微分型それぞれの歪多項式環において宮下の定理の別証明を与えているが, ここでは一般の歪多項式環における別証明を与える. その証明は直接的な計算のみを用いて示される点が特徴である.

第二章では係数環が素数標数 p の場合の微分型歪多項式環における p 次のガロア多項式について考察する. 多項式 $X^p - Xa - b$ かつ $a \neq 1$ について, それがガロア多項式であるか否かを判断するのは難しい. これに関して永原賢は $p = 2$ の場合に上記の多項式がガロア多項式になるための必要十分条件を与えた. 本章では永原の結果を素数次数 p の場合に拡張する.

第三章では弱分離多項式および弱擬似分離多項式について考察する. 最近, 浜口直樹と中島惇により分離拡大および擬似分離拡大の一般化として弱分離拡大および弱擬似分離拡大が導入された. 浜口と中島は可換環上の特別な形のモニック多項式 $f(X)$ について, その弱分離性を導関数 $f'(X)$ および判別式 $\delta(f(X))$ の非零因子性により特徴づけたが, 本章第二節ではこれを一般のモニック多項式 $f(X)$ に場合に拡張する. また浜口と中島は係数環が整域の場合の歪多項式環における弱分離多項式および弱擬似分離多項式を考察したが, 本章第三節では彼らが得た結果を係数環が非可換環の場合の歪多項式環へと拡張する. さらに歪多項式環における分離性と弱分離性の差異を示す定理を与える.

第四章では環拡大の森田同値について考察する. 環拡大の森田同値は宮下庸一により定義された概念であり, 現在までに宮下により G-ガロア拡大およびフロベニウス拡大について, また池畑秀一により分離拡大, 平田分離拡大, symmetric 拡大, QF-拡大について, これらの環拡大のクラスが森田不変であることが示されている. 本章ではこの他に trivial 拡大, liberal 拡大, depth two 拡大, 強分離拡大, 弱分離拡大等について, これらのクラスは森田不変であることを示す. また最後に森田不変でない環拡大のクラスの例をあげる.

目 次

1 歪多項式環における宮下の定理 **4**
1.1 序と準備 4
1.2 宮下の定理の別証明 9

2 微分型歪多項式環におけるガロア多項式 **15**
2.1 序と準備 15
2.2 p 次のガロア多項式 17
2.3 自己同型群 19

3 弱分離多項式と弱擬似分離多項式 **22**
3.1 序と準備 22
3.2 可換環上の弱分離多項式 24
3.3 歪多項式環における弱分離多項式と弱疑似分離多項式 26
3.3.1 自己同型型 $B[X;\rho]$ の場合 27
3.3.2 微分型 $B[X;D]$ の場合 31

4 環拡大の森田同値 **36**
4.1 序と準備 36
4.2 環拡大の森田同値 38
4.3 森田不変な環拡大のクラス 43

1　歪多項式環における宮下の定理

[26] において宮下庸一は歪多項式環における分離多項式と平田分離多項式に関する必要十分条件 (宮下の定理) を与えた．また [43] において, 筆者と池畑秀一は自己同型型と微分型の歪多項式環それぞれにおいて宮下の定理の別証明を与えた．本章では諸条件のもとで, 一般の歪多項式環における宮下の定理に対する別証明を与える．

1.1　序と準備

本論文全体を通してすべての環は単位元をもち, その部分環も同じ単位元をもつとする．また環拡大を A/B のように表す.

B を環, ρ を B の自己同型, D を ρ-微分 (すなわち, D は B から B への加法的な写像で, 任意の $\alpha, \beta \in B$ について $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\rho(\beta) + \alpha D(\beta)$ をみたす) とする．$B[X;\rho,D]$ をその乗法が $\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$ $(\alpha \in B)$ によって定まる歪多項式環とする．$B[X;\rho] = B[X;\rho,0]$ を自己同型型 (automorphism type), $B[X;D] = B[X;1,D]$ を微分型 (derivation type) という．また $B[X;\rho,D]_{(0)}$ を $B[X;\rho,D]$ におけるモニックな多項式 f で $fB[X;\rho,D] = B[X;\rho,D]f$ をみたすもの全体とする．任意の $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ に対し, 剰余環 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ は B の free な拡大環となる.

本章および第二章, 第三章において以下の記号を用いる:

$Z = B$ の中心.

$U(Z) = Z$ における可逆元全体.

$B^\rho = \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}$.

$B^D = \{\alpha \in B \mid D(\alpha) = 0\}$.

$B^{\rho,D} = B^\rho \cap B^D$.

$Z^D = Z \cap B^D$.

$D(B) = \{D(\alpha) \mid \alpha \in B\}$.

可換環上の通常の多項式環とは異なり, 歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ におけるモニックな多項式 f が常に $fB[X;\rho,D] = B[X;\rho,D]f$ をみたすとは限らない．これに関して, 以下の補題 1.1.1 から補題 1.1.5 が成り立つ．これらは直接的な計算により容易に示される.

補題 1.1.1. ([9, Lemma 1.1]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]$ について, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ $(\alpha \in B)$ かつ $Xf = f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1})$ となることである.

証明. $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ とする. 任意の $\alpha \in B$ について, 適当な $b \in B$ により $\alpha f = fb$ と表されるが, $\alpha f = X^m\rho^m(\alpha) + \cdots$ および $fb = X^m b + \cdots$ より最高次の係数を比較知して $b = \rho^m(\alpha)$ を得る. また $Xf = f(X-c)$ であるが, $Xf = X^{m+1} + X^m a_{m-1} + \cdots$ および $f(X-c) = X^m + X^m(\rho(a_{m-1}) - c) + \cdots$ より X^m の係数を比較して $c = \rho(a_{m-1}) - a_{m-1}$ を得る. 逆は明らかである. □

補題 1.1.2. ([9, Lemma 1.2]) $\rho D = D\rho$ を仮定する. このとき, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]$ について, $Bf = fB$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$a_i\rho^m(\alpha) = \sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} \rho^i D^{j-i}(\alpha) a_j \quad (\alpha \in B,\ 0 \leqq i \leqq m-1,\ a_m = 1). \tag{1.1}$$

証明. $Bf = fB$ とする. このとき, 補題 1.1.1 より任意の $\alpha \in B$ について $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ となる. また帰納的な計算により,

$$\alpha X^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \rho^i D^{j-i}(\alpha) \quad (\alpha \in B,\ j \geqq 0)$$

を得る. よって

$$\alpha f = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i\rho^i D^{j-i}(\alpha)a_j = \sum_{i=0}^{m} X^i \sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} \rho^i D^{j-i}(\alpha) a_j,$$

$$f\rho^m(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} X^i a_i \rho^m(\alpha)$$

より, 式 (1.1) と $Bf = fB$ が同値であることがわかる. □

補題 1.1.3. ([9, Lemma 1.3]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]$ について, $f \in B[X;\rho]_{(0)}$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである:
(1) $\alpha a_i = a_i\rho^{m-i}(\alpha)$ $(\alpha \in B,\ 0 \leqq i \leqq m-1)$.
(2) $\rho(a_i) - a_i = a_{i+1}(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1})$ $(0 \leqq i \leqq m-2)$.
(3) $a_0(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}) = 0$.

証明. 補題 1.1.1 より, $f \in B[X;\rho]_{(0)}$ であるための必要十分条件は $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ $\alpha \in B$ および $Xf = f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1})$ が成り立つことである. このとき両辺の係数を比較することにより, $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ と (1) が同値であり, また $Xf = f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1})$ と (2), (3) が同値であることが示される. □

補題 1.1.4. ([9, Lemma 1.6]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X; D]$ について, $f \in B[X; D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである :

(1) $a_i\alpha = \displaystyle\sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha)a_j \quad (\alpha \in B,\ 0 \leqq i \leqq m-1,\ a_m = 1).$

(2) $a_i \in B^D \quad (0 \leqq i \leqq m-1).$

証明. 補題 1.1.1 より, $f \in B[X; \rho]_{(0)}$ であるための必要十分条件は $\alpha f = f\alpha$ $(\alpha \in B)$ および $Xf = fX$ が成り立つことである. このとき, 補題 1.1.2 より $\alpha f = f\alpha$ と (1) は同値である. また両辺の係数を比較することで $Xf = fX$ と (2) が同値であることが示される. □

補題 1.1.5. ([9, Corollary 1.7]) B の標数を素数 p とする. このとき, $B[X; D]$ における p-多項式 $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0$ について, $f \in B[X; D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである :

(1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{e} D^{p^i}(\alpha)b_{i+1} = b_0\alpha - \alpha b_0$ $(\alpha \in B,\ b_{e+1} = 1)$, かつ $b_{i+1} \in Z$ $(0 \leqq i \leqq e-1)$.

(2) $b_i \in B^D$ $(0 \leqq i \leqq e)$.

証明. 補題 1.1.4 より直ちに導かれる. □

環拡大 A/B が分離拡大 (separable extension) であるとは, $A \otimes_B A$ から A への A-A-準同型 $a \otimes b \longmapsto ab$ が分解 (split) することである. また A/B が平田分離拡大 (Hirata separable extension) であるとは, $A \otimes_B A$ が A の有限個の直和の直和因子に A-A-同型であることである. 平田分離拡大は東屋多元環の概念の一般化として平田和彦により導入され, 平田や菅野孝三らにより研究された. 良く知られているように平田分離拡大は分離拡大である. ここで環拡大 A/B について,

$$(A \otimes_B A)^A = \{\mu \in A \otimes_B A \,|\, \mu x = x\mu \ (x \in A)\},$$
$$V_A(B) = \{x \in A \,|\, \alpha x = x\alpha \ (\alpha \in B)\}$$

と定める. この記号は本論文を通して利用する. 分離拡大と平田分離拡大について, 次の補題は定義から直接導かれる.

補題 1.1.6. ([6, Definition 2]) 環拡大 A/B について A/B が分離拡大であるための必要十分条件は適当な $\sum_i x_i \otimes y_i \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_i x_i y_i = 1$ が成り立つことである.

補題 1.1.7. ([37, Proposition 1]) A/B は平田分離拡大であるための必要十分条件は適当な $v_i \in V_A(B)$ と $\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して次が成り立つことである :

$$1 \otimes 1 = \sum_{i,j} v_i x_{ij} \otimes y_{ij} = \sum_{i,j} x_{ij} \otimes y_{ij} v_i.$$

$f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ について, f が $B[X;\rho,D]$ における分離多項式 (resp. 平田分離多項式) であるとは剰余環 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ が B 上分離拡大 (resp. 平田分離拡大) であるときにいう. 歪多項式環における分離多項式および平田分離多項式は岸本量夫, 永原賢, 宮下庸一, 池畑秀一, G. Szeto らにより幅広く研究されてきた (文献表参照).

以降, 本章を通して $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$, $A = B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$, $x = X + fB[X;\rho,D]$ とする. また以下のように $y_j \in A$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ を定める:

$$\begin{aligned}
y_0 &= x^{m-1} + x^{m-2}a_{m-1} + \cdots + xa_2 + a_1.\\
y_1 &= x^{m-2} + x^{m-3}a_{m-1} + \cdots + xa_3 + a_2.\\
&\vdots\\
y_{j-1} &= x^{m-j} + x^{m-j-1}a_{m-1} + \cdots xa_{j+1} + a_j.\\
&\vdots\\
y_{m-2} &= x + a_{m-1}.\\
y_{m-1} &= 1.
\end{aligned}$$

歪多項式環における分離多項式および平田分離多項式に関して, [26] において宮下庸一は次の命題 (宮下の定理) を与えた.

命題 1.1.8. ([26, Theorem 1.8]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ について, f が分離多項式であるための必要十分条件は適当な $h \in A$ が存在して $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$ かつ $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ $(\alpha \in B)$ が成り立つことである.

命題 1.1.9. ([26, Theorem 1.9], [10, Lemma 1.1]) $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ について, f が平田分離多項式であるための必要十分条件は適当な g_i, $h_i \in A$ が存在して

$$\begin{cases} \sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1, \quad \sum_i g_i x^k h_i = 0 \quad (0 \leq k \leq m-2), \\ \alpha g_i = g_i \alpha, \quad \rho^{m-1}(\alpha) h_i = h_i \alpha \quad (\alpha \in B), \end{cases}$$

が成り立つことである.

[43] において, 筆者と池畑は $B[X;\rho]$ と $B[X;D]$ それぞれにおいて, 命題 1.1.8 および命題 1.1.9 の別証明を与えた. その証明は直接的な計算のみを用いて示される点が特徴である. 本章では $\rho D = D\rho$ を仮定し, 一般の歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ において命題 1.1.8 および命題 1.1.9 の別証明を与えることを目標とする.

ここで $\rho D = D\rho$ の場合, 次が成り立つ.

補題 1.1.10. $\rho D = D\rho$ を仮定する. このとき, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]$ について, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は次が成り立つことである :

(1) $a_i\rho^m(\alpha) = \displaystyle\sum_{j=i}^{m}\binom{j}{i}\rho^i D^{j-i}(\alpha)a_j \quad (\alpha \in B,\ 0 \le i \le m-1,\ a_m = 1)$.

(2) $D(a_i) = a_{i-1} - \rho(a_{i-1}) - a_i(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}) \quad (1 \le i \le m-1)$.

(3) $D(a_0) = a_0(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1})$.

証明. 補題 1.1.1 により, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は

$$\alpha f = f\rho^m(\alpha)\ (\alpha \in B) \tag{1.2}$$

$$Xf = f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1}) \tag{1.3}$$

が成り立つことであるが, 補題 1.1.2 より (1.2) と (1) は同値である. さらに $Xf = X^m a_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1} X^i a_{i-1}$ および

$$\begin{aligned}
&f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1})\\
&= \sum_{i=0}^{m-1} X^i(X\rho(a_i) + D(a_i)) - \sum_{i=0}^{m-1} X^i a_i(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1})\\
&= \sum_{i=0}^{m-1} X^{i+1}\rho(a_i) + \sum_{i=0}^{m-1} X^i(D(a_i) - a_i(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}))\\
&= X^m a_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1} X^i(\rho(a_{i-1}) + D(a_i) - a_i(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}))\\
&\quad + D(a_0) - a_0(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1})
\end{aligned}$$

より (1.3) と (2), (3) は同値であることがわかる. □

補題 1.1.10 により, 次の系が直ちに導かれる.

系 1.1.11. $\rho D = D\rho$ を仮定し, $C(B^{\rho,D})$ を $B^{\rho,D}$ の中心とする. このとき, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ ならば, $f \in C(B^{\rho,D})[X]$ である.

1.2 宮下の定理の別証明

本節では $\rho D = D\rho$ を仮定し, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)} \cap B^{\rho}[X]$ について命題 1.1.8 および命題 1.1.9 の別証明を与える．以降, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho,D]_{(0)} \cap B^{\rho}[X]$, $A = B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$, $x = X + fB[X;\rho,D]$ とする．系 1.1.11 より $f \in C(B^{\rho,D})[X]$ であることに注意しておく．また $y_j \in A$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ を前節で定めたものとする.

証明に際して, まず次の補題を示す.

補題 1.2.1.

$$(A \otimes_B A)^A = \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j \,\middle|\, h \in A,\ \rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha\ (\alpha \in B) \right\}.$$

証明. $\{1, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ は B 上 free な A の基底なので, $A \otimes_B A$ における任意の元は適当な $z_j \in A$ を用いて $\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j$ とかける．$\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j$ を $(A \otimes_B A)^A$ における任意の元とする．すなわち $\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j$ は

$$\alpha(\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j) = (\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j)\alpha\ (\alpha \in B) \tag{1.4}$$

$$x(\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j) = (\sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j)x \tag{1.5}$$

をみたすとする. 帰納的な計算により

$$X^j\alpha = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)X^i \quad (\alpha \in B,\ 0 \leq j)$$

となることに注意して, (1.4) より

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} \alpha z_j \otimes x^j &= \sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^j\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes \Big(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)x^i \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=i}^{m-1} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} z_j\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha) \Big) \otimes x^i \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} z_i\rho^{-i}D^{i-j}(\alpha) \Big) \otimes x^j
\end{aligned}$$

がわかる. すなわち

$$\alpha z_j = \sum_{i=j}^{m-1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} z_i \rho^{-i} D^{i-j}(\alpha) \quad (0 \le j \le m-1)$$

が成り立つ. ここで $h = z_{m-1}$ とおくと, $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ ($\alpha \in B$) である. $x^m = -\sum_{j=0}^{m-1} x^j a_j = -\sum_{j=0}^{m-1} a_j x^j$ であることに注意して, (1.5) より

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} x z_j \otimes x^j &= \sum_{j=0}^{m-1} z_j \otimes x^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{m-2} z_j \otimes x^{j+1} + h \otimes x^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} z_{j-1} \otimes x^j - \sum_{j=0}^{m-1} h a_j \otimes x^j \\
&= -h a_0 \otimes 1 + \sum_{j=1}^{m-1} (z_{j-1} - h a_j) \otimes x^j
\end{aligned}$$

がわかる. よって

$$\begin{cases} x z_j = z_{j-1} - h a_j \ (1 \le j \le m-1) \\ x z_0 = -h a_0 \end{cases}$$

を得る. $h a_j = \rho^{m-1}(a_j) h = a_j h$ $(0 \le j \le m-1)$ より

$$\begin{cases} z_{j-1} = x z_j + a_j h \ (1 \le j \le m-1) \\ x z_0 = -a_0 h \end{cases}$$

となり, よって帰納的に $z_j = y_j h$ $(0 \le j \le m-1)$ が成り立つ.

逆に, $h \in A$ が $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ ($\alpha \in B$) をみたすとする. このとき

$$\begin{cases} x y_j = y_{j-1} - a_j \ (1 \le j \le m-1) \\ x y_0 = -a_0 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}
x\Big(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j \Big) &= \sum_{j=0}^{m-1} x y_j h \otimes x^j \\
&= x y_0 h \otimes 1 + \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j-1} - a_j) h \otimes x^j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-a_0h)\otimes 1 + \sum_{j=1}^{m-1}(-a_j)h\otimes x^j + \sum_{j=1}^{m-1} y_{j-1}h\otimes x^j \\
&= h\otimes(-a_0) + h\otimes(-\sum_{j=1}^{m-1} x^j a_j) + \sum_{j=0}^{m-2} y_j h\otimes x^{j+1} \\
&= h\otimes x^m + \sum_{j=0}^{m-2} y_j h\otimes x^{j+1} \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j\Big)x
\end{aligned}
$$

がわかる. 次に任意の $\alpha\in B$ について, $\alpha(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j) = \sum_{j=0}^{m-1}\alpha y_j h\otimes x^j$ および

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j\Big)\alpha &= \sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes \Big(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)x^i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}(\sum_{j=i}^{m-1} y_j h\binom{j}{i}(-1)^{j-i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha))\otimes x^i \\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\Big(\sum_{i=j}^{m-1} y_i\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha)h\Big)\otimes x^j.
\end{aligned}
$$

より, $\alpha(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j) = (\sum_{j=0}^{m-1} y_j h\otimes x^j)\alpha$ を示すには

$$
\alpha y_j = \sum_{i=j}^{m-1} y_i\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha) \quad (0\le j\le m-1) \tag{1.6}
$$

を示せば十分である. これを j に関する帰納法で示す. まず $y_{m-1}=1$ より, $j=m-1$ のとき成り立つ. ある j $(0\le j\le m-2)$ について

$$
\alpha y_{j+1} = \sum_{k=j+1}^{m-1} y_k\binom{k}{j+1}(-1)^{k-j-1}\rho^{m-k-1}D^{k-j-1}(\alpha)
$$

が成り立つと仮定すると

$$
\begin{cases}
\alpha a_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{m} a_k\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\rho^{m-k}D^{k-i}(\alpha) \quad (0\le i\le m,\ a_m=1) \\
y_j = xy_{j+1} + a_{j+1}\ (0\le j\le m-2)
\end{cases}
$$

であることより

$$
\begin{aligned}
\alpha y_j &= \alpha x y_{j+1} + \alpha a_{j+1} \\
&= x\rho(\alpha) y_{j+1} + D(\alpha) y_{j+1} + \alpha a_{j+1} \\
&= x(\sum_{k=j+1}^{m-1} y_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k} D^{k-j-1}(\alpha)) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^{m-1} y_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^{m} a_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k} D^{k-j-1}(\alpha) \\
&= \sum_{k=j+1}^{m-1} (y_{k-1} - a_k) \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k} D^{k-j-1}(\alpha) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^{m-1} y_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^{m} a_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j-1} \rho^{m-k} D^{k-j-1}(\alpha) \\
&= \sum_{k=j}^{m-2} y_k \binom{k+1}{j+1} (-1)^{k-j} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad - \sum_{k=j+1}^{m-1} y_k \binom{k}{j+1} (-1)^{k-j} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad + \binom{m}{j+1} (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= y_j \rho^{m-j-1}(\alpha) + \sum_{k=j+1}^{m-2} y_k \left\{ \binom{k+1}{j+1} - \binom{k}{j+1} \right\} (-1)^{k-j} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad + \left\{ \binom{m}{j+1} - \binom{m-1}{j+1} \right\} (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= y_j \rho^{m-j-1}(\alpha) + \sum_{k=j+1}^{m-2} y_k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \rho^{m-k-1} D^{k-j}(\alpha) \\
&\quad + \binom{m-1}{j} (-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= \sum_{k=j}^{m-1} y_k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} D^{k-j}(\alpha)
\end{aligned}
$$

よって帰納的に式 (1.5) は成り立つ. $\square$

本章の終わりに命題 1.1.8 および命題 1.1.9 の別証明を与える.

命題 1.1.8 の証明. 補題 1.1.6 および補題 1.2.1 より明らかである. $\square$

命題 1.1.9 の証明. f を $B[X;\rho,D]$ における平田分離多項式とする. このとき, 補題 1.1.7 と補題 1.2.1 より適当な $g_i \in V_A(B)$ および $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$ $(\rho^{m-1}(\alpha)h_i = h_i\alpha\ (\alpha \in B))$ が存在して

$$1 \otimes 1 = \sum_i g_i \sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j = \sum_{j=0}^{m-1} (\sum_i g_i y_j h_i) \otimes x^j$$

が成り立つ. 両辺を比較すると

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i g_i y_0 h_i = 1, \\ \displaystyle\sum_i g_i y_k h_i = 0\ (1 \leq k \leq m-1) \end{cases}$$

であるので, 帰納的に

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i g_i x^k h_i = 0\ (0 \leq k \leq m-2), \\ \displaystyle\sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1 \end{cases}$$

を得る.

逆に適当な $g_i,\, h_i \in A$ が存在して

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1, \quad \sum_i g_i x^k h_i = 0 \quad (0 \leq k \leq m-2), \\ \alpha g_i = g_i \alpha, \quad \rho^{m-1}(\alpha) h_i = h_i \alpha \quad (\alpha \in B), \end{cases}$$

が成り立つとする. このとき, 帰納的に

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i g_i y_k h_i = 0\ (1 \leq k \leq m-1), \\ \displaystyle\sum_i g_i y_0 h_i = 1, \end{cases}$$

を得る. 補題 1.2.1 より $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$ であり,

$$\sum_i g_i \sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j = \sum_{j=0}^{m-1} (\sum_i g_i y_j h_i) \otimes x^j = 1 \otimes 1$$

が成り立つので補題 1.1.7 より f は $B[X;\rho,D]$ における平田分離多項式である. $\square$

注意 1.1. ここで示した命題 1.1.8 および 1.1.9 の証明は, 宮下のそれとは違い直接的な計算のみを用いて示される点が特徴である. しかしながら, 証明の際に $\rho D = D\rho$ および $f \in B^{\rho}[X]$ を仮定しており, [26] において宮下庸一はこのような条件を仮定せず一般的の場合における証明を与えている.

2　微分型歪多項式環におけるガロア多項式

本章では B を素数標数 p とし, 微分型歪多項式環 $B[X;D]$ におけるガロア多項式について考察する．岸本量夫により $X^p - X - b \in B[X;D]_{(0)}$ はガロア多項式であることが知られているが, 一般的に $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ かつ $a \neq 1$ の場合, f が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であるか否かの判断は難しい．一方, 永原賢 $p = 2$ の場合に f がガロア多項式であるための必要十分条件を与えた．本章第二節ではこの永原の結果を素数次数 p へ拡張した定理 (定理 2.2.2) を与える．また第三節では p 次のガロア多項式のガロア群について考察する．

2.1　序と準備

本章の内容は筆者と池畑秀一の共著論文 [45] を基としている．

A/B を環拡大, G を A の自己同型からなる有限群とする．このとき, A/B が G-ガロア拡大 (G-Galois extension) であるとは, $B = A^G$ (A における G の固定環) かつ適当な A の有限個の元の集合 $\{x_i; y_i\}$ が存在して $\sum_i x_i\sigma(y_i) = \delta_{1,\sigma}$ ($\sigma \in G$) が成り立つときにいう．ここで $\delta_{1,\sigma}$ はクロネッカーのデルタである．上の $\{x_i; y_i\}$ を A/B の G-ガロアシステムと言う．良く知られているように G-ガロア拡大は分離拡大である．

歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ において, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ がガロア多項式であるとはある有限群 G により剰余環 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ が B 上 G-ガロア拡大であるときにいう．本章では微分型歪多項式環 $B[X;D]$ における $f = X^p - Xa - b$ という形の多項式のガロア性について考察する．まず補題 1.1.5 より, 次の系が導かれることに注意しておく．

系 2.1.1. ([9, Corollary 1.7]) $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]$ について $f \in B[X;D]_{(0)}$ であるための必要十分条件は次の (1), (2) が成り立つことである．

(1) $a \in Z^D$, かつ $b \in B^D$.

(2) $D^p(\alpha) - D(\alpha)a = \alpha b - b\alpha$ ($\alpha \in B$).

$B[X;D]$ におけるガロア多項式について, 次は基本的である．

補題 2.1.2. ([21, Theorem 1.1 and Corollary 1.1], [17, Lemma 2.3]) $f = X^p - X - b \in B[X;D]_{(0)}$ とする．このとき f は $B[X;D]$ におけるガロア多項式である．より正確に言うと, $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D]$ とするとき, $\sigma(x) = x + 1$ で定められる A の B-自己同型 σ により生成される位数 p の群 $G = <\sigma>$ により, A/B は G-ガロア拡大である．

証明. この補題の証明はすでに知られているが, [45] において筆者と池畑秀一はこの補題における具体的な G-ガロアシステムを示す別証明を与えたので, ここではそれを記す.

まず $A^G = B$ は明らかである. このとき, 以下が A/B の G-ガロアシステムである:

$$\begin{aligned} \{1,\, x, \cdots, x^i, \cdots, x^{p-1}\,;\, 1-x^{p-1},\, (p-1)x^{p-2}, \cdots, \\ (-1)^{i-1}\binom{p-1}{i}x^{p-i-1}, \cdots, -1\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

実際,

$$\begin{aligned} 1 = k^{p-1} &= (-x+\sigma^k(x))^{p-1} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}x^i\sigma^k(x^{p-1-i}) \quad (1 \le k \le p-1), \\ 0 = (-x+x)^{p-1} &= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}x^i x^{p-1-i}, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} 1 = 1-0 = 1 &- \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}x^i x^{p-1-i} \\ &= 1\cdot(1-x^{p-1}) + \sum_{i=1}^{p-1}x^i\left\{(-1)^{i-1}\binom{p-1}{i}x^{p-1-i}\right\}, \\ 0 = 1-1 = 1 &- \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}x^i\sigma^k(x^{p-1-i}) \\ &= 1\cdot\sigma^k(1-x^{p-1}) + \sum_{i=1}^{p-1}x^i\sigma^k\left\{(-1)^{i-1}\binom{p-1}{i}x^{p-1-i}\right\} \ (1 \le k \le p-1), \end{aligned}$$

となるので, (2.1) が A/B の G-ガロアシステムであることがわかる. □

補題 2.1.2 が示す通り $f = X^p - X - b \in B[X;D]_{(0)}$ は $B[X;D]$ におけるガロア多項式であることは知られているが, 一般的に $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]$ かつ $a \neq 1$ のとき, f がガロア多項式であるか否かを判断するのは難しい. これに関して, 永原賢は $p=2$ の場合に次を示した.

命題 2.1.3. ([29, Theorem 3.7]) *B の標数を 2, $f = X^2 - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ とする. ことのとき f が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であるための必要十分条件はある適当な元 $s \in U(Z)$ が存在して $D(s) + as = 1$ が成り立つことである.*

より正確に言えば, [29] において永原は $f = X^2 - Xa - b$ が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であるとき, すなわち, $B[X;D]/fB[X;D]$ がある有限群 G により B 上 G-ガロア拡大であるとき, G の位数は必然的に 2 になることを示した. この場合, さらに G は $D(s) + as = 1$ をみたす $s \in U(Z)$ により $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ と定められる A の B-自己同型 σ により生成される群であることが示されている.

2.2 p 次のガロア多項式

この節では命題 3.2.2 を素数次数 p に拡張することを目標とする. 以下, $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$, $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D]$ とする. まず次の補題を示す.

補題 2.2.1. 任意の $s \in U(Z)$ に対し, $D^{p-1}(s^{p-1}) = -s^{-1}(sD)^{p-1}(s)$.

証明. $W = sX + 1$ とおけば $\alpha W = W\alpha + sD(\alpha)$ $(\alpha \in B)$ より $B[X;D] = B[W;sD]$ がわかる. このとき,

$$
\begin{aligned}
(X + s^{-1})^p &= (s^{-1}W)^p = (s^{-1})^p W^p + (s^{-1} \cdot sD)^{p-1}(s^{-1})W \\
&= (s^{-1})^p W^p + D^{p-1}(s^{-1})W \\
&= (s^{-1})^p (sX + 1)^p + D^{p-1}(s^{-1})(sX + 1) \\
&= (s^{-1})^p \{(sX)^p + 1\} + D^{p-1}(s^{-1})sX + D^{p-1}(s^{-1}) \\
&= (s^{-1})^p \{s^p X^p + (sD)^{p-1}(s)X + 1\} + D^{p-1}(s^{-1})sX + D^{p-1}(s^{-1}) \\
&= X^p + \{(s^{-1})^p (sD)^{p-1}(s) + D^{p-1}(s^{-1})s\}X + (s^{-1})^p + D^{p-1}(s^{-1})
\end{aligned}
$$

となる. 一方で [19, page 190, Exercises 8] より

$$(X + s^{-1})^p = X^p + (s^{-1})^p + D^{p-1}(s^{-1})$$

であるので $(s^{-1})^p(sD)^{p-1}(s) + D^{p-1}(s^{-1})s = 0$, すなわち $D^{p-1}(s^{p-1}) = -s^{-1}(sD)^{p-1}(s)$ を得る. □

ここで命題 3.2.2 の一般化として, 第 2 章における主定理である次を得る.

定理 2.2.2. $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であり, そのガロア群がある適当な元 $s \in U(Z)$ を用いて $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ と定められる A の B-自己同型 σ_s によって生成される位数 p の群 $G = <\sigma_s>$ ならば, $s^{-1}(sD)^{p-1}(s) + s^{p-1}a = 1$ となる.

逆にある適当な元 $s \in U(Z)$ で $s^{-1}(sD)^{p-1}(s) + s^{p-1}a = 1$ を満たすものが存在するならば, f は $B[X;D$ におけるガロア多項式であり, そのガロア群は $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ で定められる A の B-自己同型 σ_s によって生成される群 $G = <\sigma_s>$ である.

証明. f がガロア多項式であり, そのガロア群がある適当な $s \in U(Z)$ を用いて $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ で定義される σ_s によって生成される位数 p の群 $G =< \sigma_s >$ とする. $\sigma_s(x^p - xa - b) = 0$ より

$$\begin{aligned}(x+s^{-1})^p - (x+s^{-1})a - b &= x^p + (s^{-1})^p + D^{p-1}(s^{-1}) - xa - s^{-1}a - b \\ &= (s^{-1})^p + D^{p-1}(s^{-1}) - s^{-1}a = 0\end{aligned}$$

となる. このとき $1+D^{p-1}(s^{p-1}) = s^{p-1}a$ であり, したがって補題2.1.2より $s^{-1}(sD)^{p-1}(s)+s^{p-1}a = 1$ を得る.

逆に $s^{-1}(sD)^{p-1}(s)+s^{p-1}a = 1$ を満たす $s \in U(Z)$ が存在すると仮定する. $\Delta = sD$ とおけば, Hochschild の公式 [23, Theore 25.5] と補題 2.1.1 より

$$\begin{aligned}\Delta^p = (sD)^p &= s^p D^p + (sD)^{p-1}(s)D \\ &= s^p(aD + I_b) + (sD)^{p-1}(s)D \\ &= \{s^{p-1}a + s^{-1}(sD)^{p-1}(s)\}sD + I_{s^p b} \\ &= \Delta + I_{s^p b}\end{aligned}$$

となる. ここで $Y = sX$ とおく. このとき

$$\alpha Y = Y\alpha + \Delta(\alpha) \quad かつ \quad \alpha Y^p = Y^p\alpha + \Delta^p(\alpha) \quad (\alpha \in B)$$

より, $B[X; D] = B[Y; \Delta]$ かつ

$$\begin{aligned}Y^p - Y - s^p b &= (sX)^p - sX - s^p b \\ &= s^p X^p + (sD)^{p-1}(s)X - sX - s^p b \\ &= s^p(X^p - aX - b) = s^p f\end{aligned}$$

がわかる. 補題 2.1.2 より $g = Y^p - Y - s^p b = s^p f$ は $B[Y; \Delta]$ におけるガロア多項式であり, そのガロア群の位数は p である. したがって $B[X; D] = B[Y; \Delta]$ と $fB[X; D] = B[X; D]f = gB[Y; \Delta] = B[Y; \Delta]g$ より f は $B[X; D]$ におけるガロア多項式である. $A = B[X; D]/fB[X; D]$ と $x = X + fB[X; D] \in A$ を思い出そう. このとき補題2.1.2より A/B のガロア群は $\sigma_s(\sum_i x^i d_i) = \sum_i (x + s^{-1})^i d_i$ によって定義される位数 p の B-環準同型 $\sigma_s : A \to A$ によって生成される $G =< \sigma_s >$ であることがわかる. □

注意 2.1. 定理 2.2.2 において, 補題 2.1.2 の証明と同様の計算により

$$\begin{aligned}\{1, sx, \cdots, (sx)^i, \cdots, (sx)^{p-1}\,;\, 1 - (sx)^{p-1}, (p-1)(sx)^{p-2}, \cdots, \\ (-1)^{i-1}\binom{p-1}{i}(sx)^{p-1-i}, \cdots, -1\}\end{aligned}$$

が A/B の G-ガロアシステムであることが示される.

注意 2.2. [29] において, 永原は B の標数が 2 のとき, $f = X^2 - Xa - b$ が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であるならば, そのガロア群の位数は必然的に 2 になることを示した. したがって B の標数が p のとき, $f = X^p - Xa - b$ が $B[X;D]$ におけるガロア多項式であるならば, そのガロア群の位数は p になることが予想されるが, これはまだ示せていない.

[26, Theorem 3.2] より, $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ が分離多項式であるための必要十分条件はある適当な $y \in V_A(B)$ が存在して $\tilde{D}^{p-1}(y) - ya = 1$ となることである. これに関連して, 補題 2.2.1 と定理 2.2.2 により次の系を得る.

系 2.2.3. $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき, ある適当な $y \in Z$ が存在して $D^{p-1}(y) - ya = 1$ かつ $y = -s^{p-1}$ $(s \in U(Z))$ となれば, f はガロア多項式であり, そのガロア群は $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ で定められる A の B-自己同型 σ_s によって生成される群 $G = <\sigma_s>$ である. 逆に f がガロア多項式であり, そのガロア群がある適当な $s \in U(Z)$ を用いて $\sigma_s(x) = x + s^{-1}$ で定められる A の B-自己同型 σ_s によって生成される位数 p の群 $G = <\sigma_s>$ ならば, $y = -s^{p-1}$ かつ $D^{p-1}(y) - ya = 1$ となる.

系 2.2.3 より次の系が直ちに導かれる.

系 2.2.4. ([45, Corollary 2.5]) $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき適当な Z^D の可逆元 u が存在して $u^{p-1} = a$ となれば, f はガロア多項式であり, そのガロア群は $\sigma_u^{-1}(x) = x + u$ で定義される $\sigma_{u^{-1}}$ によって生成される群 $G = <\sigma_{u^{-1}}>$ である.

2.3 自己同型群

この節においても $f = X^p - Xa - b \in B[X;D]_{(0)}$, $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D] \in A$ とする. ここからは自己同型群 $\mathrm{Aut}(A/B)$ について考察する. まず次の補題を示す.

補題 2.3.1. $V_A(B) = Z$ とする. このとき任意の B-環準同型 σ に対し, 適当な $u \in Z$ が存在して $\sigma(x) = x + s$ となる. したがって σ は自己同型である.

証明. 任意の $\alpha \in B$ に対し $\alpha x = x\alpha + D(\alpha)$ より $\alpha\sigma(x) = \sigma(x)\alpha + D(\alpha)$, したがって $\sigma(x) - x \in V_A(B) = Z$ を得る. □

上の補題で $V_A(B)=Z$ を仮定したが, いつ $V_A(B)=Z$ となるのだろうか. これについて以下の補題を示す.

補題 2.3.2. $D(Z)$ で生成される Z のイデアルが非零因子を含めば, $V_A(B)=Z$ となる.

証明. $g=x^{p-1}d_{p-1}+x^{p-2}d_{p-2}+\cdots+xd_1+d_0$ を任意の $V_A(B)$ の元とする. 任意の $\alpha\in B$ に対し $\alpha g=g\alpha$ であることより

$$\alpha d_{p-1}=d_{p-1}\alpha \quad かつ \quad (p-1)D(\alpha)d_{p-1}=d_{p-2}\alpha-\alpha d_{p-2}$$

となる. また仮定より, 適当な $u_i,\, v_i\in Z$ が存在して $\sum_i D(u_i)v_i=c$ が Z の非零因子となる. $D(u_i)d_{p-1}=0$ より $\sum_i D(u_i)v_id_{p-1}=cd_{p-1}=0$, したがって $d_{p-1}=0$ を得る. これを繰り返せば $g=d_0\in Z$ が示される. □

ここで次のように Z_0 を定める:

$$Z_0=\{u\in Z\,|\,u^p+D^{p-1}(u)=ua\}.$$

このとき Z_0 は Z の加法的な部分群となる. 任意の $u\in Z_0$ に対し次のように B-環準同型 τ_u を定める:

$$\tau_u: A\longrightarrow A,\quad \tau_u(\sum_{i=0}^{p-1}x^id_i)=\sum_{i=0}^{p-1}(x+u)^id_i.$$

容易にわかるように, 0 ではない $u\in Z_0$ に対し τ_u の位数は p である. また任意の $v\in Z_0$ について $\tau_u\tau_v=\tau_{u+v}$ であることより $\{\tau_u|\ u\in Z_0\}$ は $\mathrm{Aut}(A/B)$ の部分群である. このとき次の定理を得る.

定理 2.3.3. $V_A(B)=Z$ とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{Aut}(A/B)=\{\tau_u|\ u\in Z_0\}(\cong Z_0)$ となる. したがって $\mathrm{Aut}(A/B)$ はアーベル群であり, 1 ではない $\mathrm{Aut}(A/B)$ の元の位数は p である.

(2) 任意の $u\in Z_0$ に対し, u が Z で可逆ならば A/B は $<\tau_u>$-ガロア拡大である.

(3) 任意の $u\in Z_0$ に対し, u が Z の零因子ならば A/B は $<\tau_u>$-ガロア拡大ではない.

(4) 任意の $u\in Z_0$ に対し, A/B が $<\tau_u>$-ガロア拡大であり, かつ $u\in Z^D$ ならば u は Z で可逆である.

証明. (1) $\sigma \in \mathrm{Aut}(A/B)$ とすると, 補題 2.3.1 よりある適当な $u \in Z$ を用いて $\sigma(x) = x + u$ と書ける. また $\sigma(x^p - xa - b) = 0$ より定理 2.2.2 の証明と同様の計算により $u^p + D^{p-1}(u) = ua$ を得る.

(2) u は Z_0 で可逆とし, $s = u^{-1}$ とおく. このとき補題 2.2.1 をにより, $u^p + D^{p-1}(u) = ua$ から $s^{-1}(sD)^{p-1}(s) + s^{p-1}a = 1$ が導かれる. したがって定理 2.2.2 より A/B は $<\tau_u>$-ガロア拡大である.

(3) u が Z の零因子のとき, 適当な $v \in Z$ が存在して $uv = 0$ となる. このとき $\tau(xv) = \tau(x)v = (x+u)v = xv$ より $B \subsetneq A^{\tau_u}$ がわかる. よって A/B は $<\tau_u>$-ガロア拡大ではない.

(4) $\{\alpha_j; \beta_j\}$ を A/B の $<\tau_u>$-ガロアシステムとする. すなわち $\sum_j \alpha_j\beta_j = 1$ かつ $\sum_j \alpha_j\tau_u(\beta_j) = 0$ が成り立つ. ここで $\beta_j = \sum_{i=0}^{p-1} x^i d_{ij}$ とおけば,

$$\tau_u(\beta_j) = \sum_{i=0}^{p-1}(x+u)^i d_{ij} = \sum_{i=0}^{p-1}\Big(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}x^k u^{i-k}\Big)d_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1}x^k\Big(\sum_{i=k}^{p-1}\binom{i}{k}u^{i-k}d_{ij}\Big),$$

より

$$\begin{aligned}\beta_j - \tau_u(\beta_j) &= \sum_{k=0}^{p-1}x^k d_{kj} - \sum_{k=0}^{p-1}x^k\Big(\sum_{i=k}^{p-1}\binom{i}{k}u^{i-k}d_{ij}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}x^k\Big(d_{kj} - \sum_{i=k}^{p-1}\binom{i}{k}u^{i-k}d_{ij}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}x^k\Big(-\sum_{i=k+1}^{p-1}\binom{i}{k}u^{i-k}d_{ij}\Big)\end{aligned}$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned}1 = 1 - 0 &= \sum_j \alpha_j\beta_j - \sum_j \alpha_j\tau_u(\beta_j)\\ &= \sum_j \alpha_j(\beta_j - \tau_u(\beta_j))\\ &= \sum_j \alpha_j\Big(-\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{i=k+1}^{p-1}x^k\binom{i}{k}u^{i-k-1}d_{ij}\Big)u\end{aligned}$$

となり, u は Z で可逆であることが示される. □

3　弱分離多項式と弱擬似分離多項式

本章では環上の弱分離多項式および弱擬似分離多項式について考察する. [5] において, 浜口直樹と中島惇により分離拡大および擬似分離拡大の一般化として弱分離拡大および弱擬似分離拡大が導入し, 可換環上の弱分離多項式環や歪多項式環における弱分離多項式および弱擬似分離多項式について考察した. 本章では彼らの結果をより精密化および一般化することを目標とする. 第二節では可換環上のモニック多項式 $f(X)$ について, その弱分離性を判別式 $\delta(f(X))$ および導関数 $f'(X)$ を用いて特徴づける. 第三節では歪多項式環における弱分離多項式の必要十分条件を与え, これにより歪多項式環における分離性と弱分離性の差異を示す定理を与える.

3.1　序と準備

本章の内容は筆者の論文 [50] を基としている.

A/B を環拡大, M を両側 A-A-加群, x および y を任意の A の元とする. このとき加法的な写像 $D : A \longrightarrow M$ が A から M への B-微分であるとは, $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ および任意の $\alpha \in B$ について $D(\alpha) = 0$ となるときにいう. さらに $D(x)y = yD(x)$ となるとき D は中心的であるといい, ある適当な $m \in M$ により $D(x) = mx - xm$ となるとき D は内部的であるという.

環拡大 A/B が分離拡大であるとは $a \otimes b \mapsto ab$ で定められる $A \otimes_B A$ から A への A-A-準同型が分裂することであったが, 次の補題は定義から容易に示される.

補題 3.1.1. ([4, Satz 4.2]) 環拡大 A/B について, 次は同値である.

(1) A/B は分離拡大である.

(2) 任意の両側 A-加群 M について, A から M への B-微分 $D : A \longrightarrow M$ はすべて内部的である.

[34] において, 中井喜和は微分加群を用いて可換環の分離拡大の一般化として擬似分離拡大 (quasi-separable extension) を導入したが, これに関して小松弘明は非可換環の疑似分離拡大を次のように特徴づけた.

補題 3.1.2. ([22, Lemma 2.1]) 環拡大 A/B について次は同値である.

(1) A/B は擬似分離拡大である.

(2) 任意の両側 A-加群 M について, A から M への中心的 B-微分 $D : A \longrightarrow M$ はすべて零である.

このような背景の中, 近年 [5] において, 浜口直樹と中島惇は分離拡大と擬似分離拡大の一般化として次の定義を与えた.

定義 3.1.3. ([5, Definition 2.1]) (1) 環拡大 A/B が弱分離拡大 *(weakly separable extension)* であるとは, A から A への B-微分 $D : A \longrightarrow A$ がすべて内部的であるときにいう.

(2) 環拡大 A/B が弱擬似分離拡大 *(weakly quasi-separable extension)* であるとは, A から A への中心的 B-微分 $D : A \longrightarrow A$ がすべて零であるときにいう.

明らかに弱分離拡大は分離拡大であり, 弱擬似分離拡大は擬似分離拡大である. さらに, [22, Theorem 2.4] により分離拡大は擬似分離拡大であることが知られている. 可換環拡大においては弱分離拡大と弱擬似分離拡大は一致する.

例 3.1. ([5, Example 2.2]) 弱分離拡大であるが分離拡大でない例を示そう. A を可換環, $M_2(A)$ を A 上の 2 次行列環とする. このとき以下のような $M_2(A)$ の部分集合 T_2, R_2 を考える:

$$T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \middle| r, s, t \in A \right\}, \quad R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \middle| r \in A \right\}.$$

このとき T_2 は単位元 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を共有する R_2 の拡大環となる. ここで $D : T_2 \longrightarrow T_2$ を任意の R_2-微分とし, $\{E_{ij}\}$ $(1 \leqq i, j \leqq 2)$ を行列単位とする. T_2 において $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ が R_2 上の基底なので, D はこれらの像により定められる. このとき, 適当な a, $b \in A$ により

$$D(E_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることが容易に確かめられる. 従って任意の $\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \in T_2$ について,

$$\begin{aligned} D\left(\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & ra + sb - ta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので D は内部的であり, よって T_2/R_2 は弱分離拡大である. また D が中心的であるとすると, 任意の $\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix} \in T_2$ について $u(ra + sb - ta) =$

$(ra+sb-ta)w$ が成り立ち, これより $a=b=0$ を得る．従って D は零であり, すなわち T_2/R_2 は弱疑似分離拡大である．

一方で, T_2/R_2 は分離拡大でないことを示そう．以下のような T_2 から R_2 への写像 φ を考える:

$$\varphi : T_2 \ni \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \in R_2.$$

このとき φ は環準同型であり, 任意の $y \in R_2$ について $\varphi(y)=y$ となる．よって, もし T_2/R_2 は分離拡大ならば [40, Proposition 1] より, 適当な中心ベキ等元 $e \in A$ が存在して任意の $x \in T_2$ について $\varphi(x)e = ex$ かつ $\varphi(e)=1$ が成り立つ．T_2 における任意の中心ベキ等元は適当な A のベキ等元 ξ を用いて $\begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix}$ と表されるので, $\varphi(x)e = ex$ より $e=0$ となり, これは $\varphi(e)=1$ に矛盾する．よって T_2/R_2 は分離拡大でない.

歪多項式環 $B[X;\rho,D]$ において, $f \in B[X;\rho,D]_{(0)}$ が $B[X;\rho,D]$ における弱分離多項式 (resp. 弱擬似分離多項式) であるとは, 剰余環 $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ が B 上弱分離拡大 (resp. 弱擬似分離拡大) であるときにいう．第二節では可換上の弱分離多項式について, また第三節では歪多項式環における弱分離多項式および弱擬似分離多項式について考察する.

3.2 可換環上の弱分離多項式

本節では可換環上の弱分離多項式について考察する．第一章の補題1.1.6で見たように,環拡大 A/B が分離拡大であるための必要十分条件は適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j = 1$ が成り立つことであった．これに関連して, 可換環拡大における弱分離性について次が成り立つ.

補題 3.2.1. A/B を可換環拡大とする．このとき, 適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j$ が A における非零因子となるならば, A/B は弱分離拡大である.

証明. D を任意の A の B-微分とし, 適当な $\sum_j x_j \otimes y_j \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して $\sum_j x_j y_j$ が A における非零因子であるとする．また, 以下の A-B-準同型を考える:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_B A & \longrightarrow & A \otimes_B A & \longrightarrow & A \\ x \otimes y & \longmapsto & x \otimes D(y) & \longmapsto & xD(y) \end{array}$$

任意の $\alpha \in A$ について $\alpha \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_j x_j \otimes y_j \alpha$ より

$$\alpha \sum_j x_j D(y_j) = \sum_j x_j D(y_j \alpha) = \sum_j x_j D(y_j)\alpha + \sum_j x_j y_j D(\alpha)$$

がわかる. よって $\sum_j x_j y_j D(\alpha) = 0$ を得る. 仮定より $\sum_j x_j y_j$ は A における非零因子であるので, $D(\alpha) = 0$ である. したがって A/B は弱分離拡大である. □

例 3.2. B を環, G を位数 n の有限群, $A = B[G]$ (G の B 上の群環) とする. このとき, $\sum_{g\in G} g\otimes g^{-1} \in (A\otimes_B A)^A$ であることは容易に示される. よって $n\,(=\sum_{g\in G} gg^{-1})$ が可逆元であれば, A/B は分離拡大である. B が可換環で G が位数 n のアーベル群の場合, 補題3.2.1 より n が A において非零因子であれば, A/B は弱分離拡大である. これは B が非可換環で G が位数 n のアーベル群の場合でも成り立つ. 実際, 任意の A の B-微分 D と $\alpha \in A$ について,

$$\alpha \sum_{g\in G} gD(g^{-1}) = \sum_{g\in G} gD(g^{-1}\alpha) = \sum_{g\in G} gD(g^{-1})\alpha + \sum_{g\in G} gg^{-1}D(\alpha).$$

となるが, $D(g^{-1})$ が A の中心の元であることより $nD(\alpha) = 0$ を得る. したがって n が A において非零因子であれば $D = 0$ となり, よって A/B は弱分離拡大である.

ここからは B を可換環とし, B 上の多項式環 $B[X]$ における弱分離多項式について考察する. [29] において永原賢は $B[X]$ における分離多項式 $f(X)$ をその導関数 $f'(X)$ および判別式 $\delta(f(X))$ を用いて次のように特徴付けた.

命題 3.2.2. ([29, Theorem 2.3]) B を可換環, $f(X)$ を $B[X]$ におけるモニック多項式とする. このとき以下は同値である.
(1) $f(X)$ は $B[X]$ における分離多項式である.
(2) $f'(X)$ は $B[X]/(f(X))$ において可逆である.
(3) $\delta(f(X))$ は B において可逆である.

[5] において浜口直樹と中島惇は $B[X]$ における $f(X) = X^m - Xa - b$ という形の多項式について, 以下が同値であることを示した:
(1) $f(X) = X^m - Xa - b$ は $B[X]$ における弱分離多項式である.
(2) $f'(X)$ が $B[X]/(f(X))$ における非零因子である.
(3) $\delta(f(X))$ が B における非零因子である.

本節では上記の浜口と中島の結果を一般のモニック多項式 $f(X)$ に拡張した次の結果を与える.

定理 3.2.3. B を可換環, $f(X)$ を $B[X]$ におけるモニック多項式とする. このとき以下は同値である.
(1) $f(X)$ は $B[X]$ における弱分離多項式である.
(2) $f'(X)$ が $B[X]/(f(X))$ における非零因子である.
(3) $\delta(f(X))$ が B における非零因子である.

証明. [29, Theorem 1.3] において, (2) と (3) が同値であることはすでに知られている. ここでは (1) と (2) が同値であることを示す. $f(X) = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X]$, $A = B[X]/(f(X))$, $x = X + (f(X))$ とする.

(2) $\Longrightarrow$ (1). $f'(X)$ が $B[X]/(f(X))$ における非零因子であるとする. 第一章の補題 1.2.1 により

$$(A \otimes_B A)^A = \{\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j) \mid h \in A\}$$

なので, $\sum_{j=0}^{m-1} y_j \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$ である. また $f'(x) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j$ であることは容易に確かめられる. いま $f'(x)$ は A における非零因子なので, 補題 3.2.1 より $f(X)$ は $B[X]$ における弱分離多項式である.

(1) $\Longrightarrow$ (2). $f(X)$ を $B[X]$ における弱分離多項式とし, $g(x) = g(X) + (f(X)) \in A$ ($g(X) \in B[X]$) が $f'(x)g(x) = 0$ をみたすとする. このとき $D^*(X) = g(X)$ により定められる $B[X]$ の B-微分 D^* について, $f'(x)g(x) = 0$ より明らかに $D^*(f(X)) \in (f(X))$ である. よって D^* の自然な拡張として, A の B-微分 D で $D(x) = g(x)$ となるものが存在する. $f(X)$ が弱分離的であることより, $D(x) = g(x) = 0$ を得る. したがって $f'(x)$ は A における非零因子である. □

定理 3.2.3 より, $f(X) = X^2 - aX - b$ が $B[X]$ における弱分離多項式であることと $\delta(f(x)) = a^2 + 4b$ が B において非零因子であることは同値である. 整数環 $\mathbb{Z}$ 上の 2 次多項式については以下のように分類される.

例 3.3. ([5, Example 3.3]) $n, m \in \mathbb{Z}$ とする.

(1) $f(X) = X^2 - 2nX - m$ は $\mathbb{Z}[X]$ において分離的でない. $f(X)$ が $\mathbb{Z}[X]$ において弱分離的であるための必要十分条件は $m \neq -n^2$ となることである.

(2) $g(X) = X^2 - (2n+1)X - m$ は $\mathbb{Z}[X]$ において常に弱分離的である. $g(X)$ が $\mathbb{Z}[X]$ において分離的であるための必要十分条件は $n^2 + n + m = 0$ となることである.

注意 3.1. 上の例 3.3 でみたように, 弱分離的であるが分離的でない多項式は多数存在する. 分離多項式は様々な意味で可逆性と関係しているが, 弱分離多項式は非零因子が深く関係しているように思われる. 定理 3.2.3 の他にも, 例えば補題 1.1.6 のように分離拡大は様々な特徴付けがされており, それらに対応する弱分離拡大のよりよい特徴付けが望まれる.

3.3 歪多項式環における弱分離多項式と弱疑似分離多項式

[5] において, 浜口と中島は係数環 B が整域の場合の歪多項式環 $B[X;\rho]$ および $B[X;D]$ における弱分離多項式と弱擬似分離多項式について考察した. 本節では $B[X;\rho]$ と $B[X;D]$ それぞれの場合における彼らの結果を B が非可換環の場合へと拡張する.

3.3.1 自己同型型 $B[X;\rho]$ の場合

ここでは次のような形の $f \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^{\rho}[X]$ を考える:

$$f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 = \sum_{j=0}^{m} X^j a_j \quad (a_m = 1,\ m \geq 2).$$

このとき補題 1.1.3 より任意の $\alpha \in B$ について $\alpha a_j = a_j \rho^{m-j}(\alpha) \quad (0 \leq j \leq m-1)$ となることに注意しておく. さらに $A = B[X;\rho]/fB[X;\rho]$, $x = X + fB[X;\rho] \in A$ とする. いま $f \in B^{\rho}[X]$ としているので, 以下の A の自己同型 $\tilde{\rho}$ が考えられる:

$$\tilde{\rho} : A \ni \sum_{j=0}^{m-1} x^j c_j \longmapsto \sum_{j=0}^{m-1} x^j \rho(c_j) \in A.$$

また次のように記号を定める:

$J_{\rho^k} = \{h \in A \,|\, \alpha h = h\rho^k(\alpha)\ (\alpha \in B)\}\ (k \geq 1)$.
$V = V_A(B)$.
$V^{\tilde{\rho}} = \{h \in V \,|\, \tilde{\rho}(h) = h\}$.

本小節では以下で定められる J_ρ から J_{ρ^m} への $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型 τ を考える:

$$\begin{aligned}\tau(h) &= x^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{\rho}^j(h) + x^{m-2}\sum_{j=0}^{m-2}\tilde{\rho}^j(h)a_{m-1} + \cdots x\big\{\tilde{\rho}(h) + h\big\}a_2 + ha_1 \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(h)a_{k+1}.\end{aligned}$$

A の B-微分に関して, まず次の補題を示す.

補題 3.3.1. A の B-微分 δ について, $\delta(x) \in J_\rho$ かつ $\tau(\delta(x)) = 0$ が成り立つ.
逆に $\tau(g) = 0$ をみたす $g \in J_\rho$ について, A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する.

証明. δ を A の B-微分とする. このとき, 任意の $\alpha \in B$ について $\alpha\delta(x) = \delta(\alpha x) = \delta(x\rho(\alpha)) = \delta(x)\rho(\alpha)$, すなわち $\delta(x) \in J_\rho$ がわかる. また $\delta(x^k) = x^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i(\delta(x))$ $(k \geq 2)$ より

$$0 = \delta(\sum_{k=0}^{m} x^k a_k) = \sum_{k=0}^{m-1}\delta(x^{k+1})a_{k+1} = \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k}\tilde{\rho}^j(\delta(x))a_{k+1} = \tau(\delta(x)) \tag{3.1}$$

を得る.

逆に $g = g_0 + fB[X;\rho] \in J_\rho$ $(g_0 \in B[X;\rho])$ が $\tau(g) = 0$ をみたすとき, $\alpha g_0 = g_0\rho(\alpha)$ $(\alpha \in B)$ より $B[X;\rho]$ の B-微分 δ^* で $\delta^*(X) = g_0$ となるものが定められる. このとき $\tau(g) = 0$ より $\delta^*(f) \in fB[X;\rho]$ が確かめられるので, δ^* の自然な拡張として A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する. □

[5, Theorem 4.1.4] において, B が整域の場合の $B[X;\rho]$ における弱分離多項式の必要十分条件が与えられた. この結果は B が非可換環の場合において次のように拡張される.

定理 3.3.2. $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ とする. このとき f が $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} = \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}.$$

証明. まず, 常に $\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} \supset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$ が成り立つことに注意しておく. 実際, 任意の $h \in V$ について, $\sum_{k=0}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - \tilde{\rho}^m(h))a_k = 0$ となり, したがって

$$\begin{aligned}
\tau(x(\tilde{\rho}(h) - h)) &= \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(x(\tilde{\rho}(h) - h))a_{k+1} \\
&= x^m \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h) - h) + \sum_{k=0}^{m-2} x^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(\tilde{\rho}(h) - h)a_{k+1} \\
&= (-\sum_{k=0}^{m-1} x^k a_k)(\tilde{\rho}^m(h) - h) + \sum_{k=1}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - h)a_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} x^k(\tilde{\rho}^k(h) - \tilde{\rho}^m(h))a_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る.

$\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} = \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$ を仮定する. このとき任意の A の B-微分 δ について, 補題 3.3.1 より $\delta(x) \in \{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\}$ である. よって仮定より適当な $h \in V$ により $\delta(x) = x(\tilde{\rho}(h) - h) = hx - xh$ と表される. これより任意の $w \in A$ について $\delta(w) = hw - wh$ となるので δ は内部的であり, したがって f は $B[X;\rho]$ における弱分離多項式である.

逆に f を $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であると仮定し, $p \in \{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\}$ とする. このとき補題 3.3.1 より A の B-微分 δ で $\delta(x) = p$ をみたすものを構成できる. f が弱分離的であることより, 適当な $h \in V$ により $p = \delta(x) = hx - xh = x(\tilde{\rho}(h) - h)$ となる. したがって $\{g \in J_\rho \,|\, \tau(g) = 0\} \subset \{x(\tilde{\rho}(h) - h) \,|\, h \in V\}$ がわかる. □

定理 3.3.2 により, 浜口直樹と中島惇が与えた次の結果を得る.

系 3.3.3. ([5, Theorem 4.1.4 (ii)]) B を整域, ρ の位数を m, $f = X^m - u$ $(u \neq 0) \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;\rho]$ における弱分離拡大であるための必要十分条件は次が成り立つことである :

$$\{b \in B \mid \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0\} = \{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}.$$

証明. まずこの場合の $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型 τ は

$$\tau : J_\rho \longrightarrow V, \;\; \tau(g) = x^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(g)$$

であることに注意しておく. B が整域であることから, $J_\rho = \{xb \,|\, b \in B\}$ かつ $V = B$ であることが容易に確かめられる. $\tau(xb) = 0$ $(b \in B)$ のとき,

$$0 = \tau(xb) = x^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\rho}^j(xb) = u \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b)$$

となるので, $u \neq 0$ より $\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j(b) = 0$ を得る. よって定理 3.3.2 より系 3.3.3 が示される. □

定理 3.3.2 により, $B[X;\rho]$ における分離多項式と弱分離多項式の差異を次のように特徴付けることができる.

定理 3.3.4. ρ の位数を m, $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ とする. また $C(A)$ を A の中心, I_x を x によって定められる A の内部微分 (すなわち, $I_x(h) = hx - xh$ $(h \in A)$) とする. .

(1) f が $B[X;\rho]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型からなる次の列が完全系列であることである :

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}}.$$

(2) f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{\rho}}$-$V^{\tilde{\rho}}$-準同型からなる次の列が完全系列であることである :

$$0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{I_x} J_\rho \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{\rho}} \longrightarrow 0.$$

証明. まず任意の $g \in J_\rho$ について, $\tilde{\rho}^j(g)a_j = ga_j$ $(0 \leq j \leq m-1)$ に注意すれば $\mathrm{Im}\,\tau \subset V^{\tilde{\rho}}$ であることが確かめられる.

(1) 定理 3.3.2 より自明である.

(2) 分離多項式は弱分離多項式であることより, 定理の主張を示すには $\mathrm{Im}\,\tau = V^{\tilde{\rho}}$ を示せば十分である. 第一章の命題 1.1.8 より, f が $B[X;\rho]$ における分離多項式であるための必要十分条件は適当な $h \in A$ が存在して $\rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha$ $(\alpha \in B)$ かつ $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$ が成り立つことであった. いま ρ の位数は m なので, 明らかに $h \in J_\rho$ である. さらに $y_j x^j = \sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}$ より,

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1} y_j x^j \tilde{\rho}^j(h) = \sum_{j=0}^{m-1}\{\sum_{k=j}^{m-1} x^k a_{k+1}\}\tilde{\rho}^j(h) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{j=0}^{k} \tilde{\rho}^j(h)a_{k+1} = \tau(h)$$

を得る. これは $\mathrm{Im}\,\tau = V^{\tilde{\rho}}$ を意味する. □

注意 3.2. ここまで本小節において $f \in B[X;\rho]_{(0)} \cap B^\rho[X]$ を仮定していたが, 一般的に $B[X;\rho]_{(0)}$ における多項式が常に $B^\rho[X]$ に含まれるとは限らない. これに関して, [9, Corollary 1.5] において B が半単純環ならば, $B[X;\rho]_{(0)}$ における多項式は常に $C(B^\rho)[X]$ ($C(B^\rho)$ は B^ρ の中心) に含まれることが示されている.

本小節の最後に $B[X;\rho]$ における弱擬似分離多項式について考察する. [5, Theorem 4.1.1] において, 浜口と中島は B が整域の場合, $B[X;\rho]_{(0)}$ に含まれる多項式はすべて弱擬似似分離的であることを示した. より正確に言えば, 可換環 B について, $\rho \neq 1$ で $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ が B における非零因子を含めば, $B[X;\rho]_{(0)}$ に含まれるすべての多項式は弱擬似分離的である. B が非可換環の場合, $B[X;\rho]$ における弱擬似分離性について次が成り立つ.

命題 3.3.5. (1) $\rho \neq 1$ かつ $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ が B における非零因子を含めば, $B[X;\rho]_{(0)}$ に含まれるすべての多項式は弱擬似分離的である.

(2) $f = X^m - u \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき, m および u が B における非零因子であれば, f は $B[X;\rho]$ における弱擬似分離多項式である.

証明. (1) $g \in B[X;\rho]_{(0)}$ とし, δ を $B[X;\rho]/gB[X;\rho]$ の中心的 B-微分とする. また $x = X + gB[X;\rho] \in B[X;\rho]/gB[X;\rho]$ と定める. このとき, 任意の $\alpha \in B$ について, $\delta(x)(\rho(\alpha) - \alpha) = 0$ となることが容易にわかる. よって $\{\rho(c) - c \,|\, c \in B\}$ が B における非零因子を含めば, $\delta = 0$ となる.

(2) δ を A の中心的 B-微分で $\delta(x) = \sum_{j=0}^{m-1} x^j d_j$ とする. このとき, 帰納的に $\delta(x^k) = kx^{k-1}\delta(x)$ $(k \geqq 1)$ であることが示され, さらに $x^m = u$ より

$$0 = \delta(x^m) = mx^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} x^j d_j = mx^{m-1}d_0 + m\sum_{j=0}^{m-2} x^j u d_{j+1}$$

となる．よって $md_0 = 0$ および $mud_j = 0$ $(1 \le j \le m-1)$ を得るので, m と u が B における非零因子であれば, $\delta = 0$ となる． □

3.3.2 微分型 $B[X;D]$ の場合

本小節を通して B の標数を素数 p とし, 次のような p-多項式 $f \in B[X;D]_{(0)}$ を考える:

$$f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 = \sum_{j=0}^{e} X^{p^j} b_{j+1} + b_0 \ (b_{e+1} = 1).$$

ここで補題 1.1.5 より

$$\begin{cases} b_0 \in B^D, \quad b_{j+1} \in Z^D \ (0 \le j \le e-1), \\ \sum_{j=0}^{e} D^{p^j}(\alpha) b_{j+1} = b_0\alpha - \alpha b_0 \quad (\alpha \in B) \end{cases}$$

となることに注意しておく．また $A = B[X;D]/fB[X;D]$, $x = X + fB[X;D] \in A$ とする．$f \in B^D[X]$ であることより, 以下のような A の (内部) 微分 $\tilde{D}$ が考えられる:

$$\tilde{D} : A \ni \sum_{j=0}^{p^e-1} x^j c_j \longmapsto \sum_{j=0}^{p^e-1} x^j D(c_j) \in A.$$

このとき次のように記号を定める:

$V = V_A(B)$
$\tilde{D}(V) = \{\tilde{D}(h) \mid h \in V\}$
$V^{\tilde{D}} = \{v \in V \mid \tilde{D}(v) = 0\}$

本小節では以下のよに定められる V から $V^{\tilde{D}}$ への $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型 τ を考える:

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \tilde{D}^{p^e-1}(h) + \tilde{D}^{p^{e-1}-1}(h)b_e + \cdots + \tilde{D}^{p-1}(h)b_2 + hb_1 \\ &= \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(h) b_{j+1}. \end{aligned}$$

初めに A の B-微分に関する補題を 2 つ示す．

補題 3.3.6. *δ が A の微分ならば, 次が成り立つ:*

$$\delta(x^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) \quad (k \ge 2). \tag{3.2}$$

証明. 帰納法を用いて示す. まず $k=2$ のとき (3.3) が成り立つのは明らかである. $\delta(x^k)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x))$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
\delta(x^{k+1}) &= \delta(x^k)x + x^k\delta(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x))x + x^k\delta(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\Big\{x\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^{k-j}(\delta(x))\Big\} + x^k\delta(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^{j+1}\tilde{D}^{k-1-j}(\delta(x)) + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\
&= kx^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j-1}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) + x^k\delta(x) \\
&= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\left\{\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}\right\}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\
&= (k+1)x^k\delta(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k+1}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x)) + \tilde{D}^k(\delta(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}x^j\tilde{D}^{k-j}(\delta(x))
\end{aligned}$$

を得る. よって $k+1$ のときも (3.3) は成り立つ. □

補題 3.3.7. A の B-微分 A について, $\delta(x)\in V$ かつ $\tau(\delta(x))=0$ が成り立つ.
逆に $\tau(g)=0$ をみたす $g\in V$ について, A の B-微分 δ で $\delta(x)=g$ となるものが存在する.

証明. δ を A の B-とする. このとき任意の $\alpha\in B$ について $\alpha\delta(x)=\delta(x)\alpha$ となることは明らかである. また補題 3.3.6 より,

$$0=\delta(\sum_{j=0}^{e}x^{p^j}b_{j+1}+b_0)=\sum_{j=0}^{e}\delta(x^{p^j})b_{j+1}=\sum_{j=0}^{e}\tilde{D}^{p^j-1}(\delta(x))b_{j+1}=\tau(\delta(x))$$

を得る.
逆は補題 3.3.1 の証明と同様である. □

[5, Theorem 4.2.3] において, B が整域の場合の $B[X;D]$ における弱分離多項式の必要十分条件が与えられたが, B が非可換環の場合には次の結果を得る.

定理 3.3.8. $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V).$$

証明. まず, 任意の $h \in V$ について $\sum_{j=0}^{e} D^{p^j}(h)b_{j+1} = 0$ であることより, 常に $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} \supset \tilde{D}(V)$ が成り立つことに注意しておく.

f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であると仮定する. 任意の $g \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ について, 補題 3.3.7 より A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する. f が弱分離的であることより, 適当な $h \in V$ により $g = \delta(x) = hx - xh = \tilde{D}(h)$ と表される. すなわち $g \in \tilde{D}(V)$ を得る.

逆に $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V)$ を仮定する. このとき任意の A の B-微分 δ に対し, 補題 3.3.7 より $\delta(x) \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ である. よって適当な $h \in V$ により $\delta(x) = \tilde{D}(h) = hx - xh$ と表される. このとき, 任意の $w \in A$ について $\delta(w) = hw - wh$ であることは容易に確かめられる. よって δ は内部的であり, したがって f は $B[X;D]$ における弱分離多項式である. □

定理 3.3.8 により, 浜口直樹と中島惇が与えた次の結果を得る.

系 3.3.9. ([5, Theorem 4.2.3]) B を素数標数 p の整域とし, $f = X^p + Xb_1 + b_0 \in B[X;\rho]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{c \in B \mid D^{p-1}(c) + cb_1 = 0\} = D(B).$$

証明. まずこの場合の $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型 τ は

$$\tau : V \longrightarrow V^{\tilde{D}}, \quad \tau(h) = \tilde{D}^{p-1}(h) + hb_1$$

であることに注意しておく. よって定理 3.3.8 より, 系の主張を示すには $V = B$ であることを示せば十分である. $h = \sum_{j=0}^{p-1} x^j c_j \in V$ とする. このとき任意の $\alpha \in B$ について $\alpha h = h\alpha$ であることより,

$$c_i\alpha = \sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha)c_j \quad (0 \leq i \leq p-1)$$

となる. とくに $c_{p-2}\alpha = \alpha c_{p-2} + (p-1)D(\alpha)c_{p-1}$ なので, B が整域であることより $c_{p-1} = 0$ を得る. これを繰り返すと, $h = c_0 \in B$, すなわち $V = B$ がわかる. □

定理 3.3.8 により $B[X;D]$ における分離性と弱分離性の差異を次のように表すことができる.

定理 3.3.10. $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする.
(1) f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全であることである:

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}}.$$

(2) f が $B[X;D]$ における分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全であることである:

$$0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}} \longrightarrow 0.$$

証明. (1) 定理 3.3.8 より明らかである.
(2) 分離多項式は弱分離多項式であるので, 定理の主張を示すには $\operatorname{Im}\tau = V^{\tilde{D}}$ を示せば十分である. また [9, Theorem 4.1] において示されているとおり, f が $B[X;D]$ において分離的であるための必要十分条件は, 適当な $h \in V$ が存在して $\tau(h) = 1$ が成り立つことである. これは $\operatorname{Im}\tau = V^{\tilde{D}}$ を意味する. □

本小節の最後に $B[X;D]$ における弱擬似分離多項式について考察する. B が整域の場合, [5, Theorem 4.2.1] において浜口と中島が示したとおり $B[X;D]_{(0)}$ に含まれる多項式はすべて弱擬似分離的である. より正確に言えば, 可換環 B について $D(B)$ が B における非零因子を含めば $B[X;D]_{(0)}$ に含まれる多項式はすべて弱擬似分離的である. B が非可換環の場合, 弱擬似分離多項式について次が成り立つ.

命題 3.3.11. (1) $D(B)$ が B における非零因子を含めば, $B[X;D]_{(0)}$ に含まれる多項式はすべて弱擬似分離的である.
(2) $f = X^{p^e} + X^{p^{e-1}}b_e + \cdots + X^p b_2 + Xb_1 + b_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき b_1 が B における非零因子ならば, f は $B[X;D]$ における弱擬似分離多項式である.

証明. (1) $g \in B[X;D]_{(0)}$, δ を $B[X;\rho]/gB[X;D]$ の中心的 B-微分, $x = X + gB[X;D] \in B[X;\rho]/gB[X;D]$ とする. このとき, 任意の $\alpha \in B$ について

$$\delta(x\alpha)x = \delta(x)(x\alpha + D(\alpha)) = x\delta(x\alpha) + \delta(x)D(\alpha)$$

となることより, $\delta(x)D(\alpha) = 0$ を得る. したがって $D(B)$ が非零因子を含めば, $\delta = 0$ となる.

(2) δ を A の中心的 B-微分とする．このとき $x\delta(x) = \delta(x)x$ より, $\tilde{D}(\delta(x)) = 0$ がわかる．よって補題 3.3.7 より

$$0 = \tau(\delta(x)) = \sum_{j=0}^{e} \tilde{D}^{p^j-1}(\delta(x))b_{j+1} = \delta(x)b_1$$

となる. したがってが b_1 が B における非零因子ならば, $\delta = 0$ である. $\square$

4　環拡大の森田同値

[25] において宮下庸一により環拡大の森田同値が導入し, 宮下は G-ガロア拡大とフロベニウス拡大のクラスが森田不変であることを示した．また [8] において池畑秀一は分離拡大, 平田分離拡大,symmetric 拡大, および QF-拡大のクラスも森田不変であることを示した．本章ではこの他に森田不変である環拡大のクラスを紹介する．第二節において環拡大の森田同値に関する基本的な事実を述べ, 後の証明のために補題をいくつか準備する．第三節において, trivial 拡大, liberal 拡大, depth two 拡大, 強分離拡大, および弱分離拡大のクラスが森田不変であることを示す．さらに森田不変でない環拡大の例を与える.

4.1　序と準備

本節において, 環上の加群はすべて単位加群を意味する.

まず本章で用いる記号をいくつか準備する．A および A' を環, ${}_AM_{A'}$ および ${}_AN_{A'}$ を A-A'-加群とする．${}_AM_{A'}$ が ${}_AN_{A'}$ の有限個の直和の直和因子に A-A'-同型であるとき, ${}_AM_{A'}|{}_AN_{A'}$ と表す．また ${}_AM_{A'}|{}_AN_{A'}$ かつ ${}_AN_{A'}|{}_AM_{A'}$ のとき, ${}_AM_{A'} \sim {}_AN_{A'}$ と表す．$\mathrm{Hom}^r({}_AM, {}_AN)$ を M から N への左 A-準同型全体からなる両側 A'-加群とする．同様に $\mathrm{Hom}^\ell(M_{A'}, N_{A'})$ を M から N への左 A-準同型全体からなる両側 A-加群とする．${}_AM_{A'}$ が森田加群 (Morita module) であるとは, ${}_AM \sim {}_AA$ かつ $\mathrm{End}^r({}_AM) = A'$ が成り立つときにいう．すなわち, 森田加群 ${}_AM_{A'}$ が存在するとき, A と A' は環として森田同値である．さらに環拡大 A/B と A の部分集合 X, および両側 A-A-加群 S について

$$V_A(X) = \{a \in A \,|\, xa = ax \ (x \in X)\},$$
$$S^A = \{s \in S \,|\, \alpha s = s\alpha \ (\alpha \in A)\}$$

と定める．とくに $V_A(B)$ および $V_A(A)$ はそれぞれ A における B の centralizer および A の中心を意味する.

本章で取り扱う環拡大を導入しよう．A/B が trivial 拡大 (trivial extension) であるとは, 適当な両側 B-B-加群 S が存在して $A = B \oplus S$ であり, A における積が $(b, s)(c, t) = (bc, bt + sc)$ $(b, c \in B,\ s, t \in S)$ で与えられるときにいう．trivial 拡大は古典的な環拡大のひとつである．A/B が liberal 拡大 (liberal extension) であるとは, $V_A(B)$ の有限個の元の集合で $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ で $A = \sum_{i=1}^n v_iB$ をみたすものが存在するときにいう．ここでの liberal 拡大とは, [36] においての意味である．liberal

拡大は centralizing 拡大 (centralizing extension) と呼ばれることもある．また A/B が左 (resp. 右) depth two 拡大 (left (resp. right) depth two extension) であるとは, ${}_BA \otimes_B A_A | {}_BA_A$ (resp. ${}_AA \otimes_B A_B | {}_AA_B$) が成り立つときにいう．[20] において, L. Kadison と K. Szlachányi は depth two 拡大を次のように特徴付けた.

命題 4.1.1. ([20, Lemma 3.7] A/B が左 (resp. 右) depth two 拡大であるための必要十分条件は, 適当な $t_i \in (A \otimes_B A)^B$ と $\beta_i \in \mathrm{End}^\ell({}_BA_B)$ が存在して任意の x, $y \in A$ について $\sum_i t_i\beta_i(x)y = x \otimes y$ (resp. $\sum_i x\beta_i(y)t_i = x \otimes y$) が成り立つことである.

最後に強分離拡大について述べよう．A/B について, $V = V_A(B)$ および $C = V_A(A)$ と定める．第一章における分離拡大と平田分離拡大を思い出そう．良く知られているように, A/B が平田分離拡大であるための必要十分条件は V が C-加群として有限生成的であり ${}_AA \otimes_B A_A \cong {}_A\mathrm{Hom}^\ell(V_C, A_C)_A$ が成り立つことである (cf. [38]). [24] において, A. Mewborn と E. McMahon は平田分離拡大の一般化として強分離拡大を次のように定義した: A/B が強分離拡大 (strongly separable extension) であるとは, V が C-加群として有限生成射影的であり A-A-準同型

$$A \otimes_B A \ni x \otimes y \longmapsto [v \mapsto xvy] \in \mathrm{Hom}^\ell(V_C, A_C)$$

が分裂全射であるときにいう．明らかに強分離拡大は平田分離拡大である．さらに [24, Proposition 3.2] において, 強分離拡大は分離拡大であることが示されている. [41] において, 菅野孝三は強分離拡大を次のように特徴づけた.

命題 4.1.2. [41, Theorem 1.1] A/B が強分離拡大であるための必要十分条件は, 適当な $v_i \in V_A(B)$ と $\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して任意の $u \in V_A(B)$ について $u = \sum_{i,j} v_i x_{ij} u y_{ij}$ が成り立つことである.

本章ではこの他にも, 第三章で述べた弱分離拡大も取り扱う.
[25] において宮下庸一は環拡大の森田同値を次のように導入した.

定義 4.1.3. 環拡大 A/B と A'/B' について, 森田加群 ${}_AM_{A'}$ および ${}_BN_{B'}$ が存在して ${}_AA \otimes_B N_{B'} \cong {}_AM_{B'}$ が成り立つとき, A/B と A'/B' は森田同値であるといい, $A/B \sim A'/B'$ と表す.

実際, [25, Proposition 3.2] において, 定義 4.1.3 における $\sim$ は同値関係であることが示されている．また, 環拡大のクラス $\mathcal{C}$ が森田不変であるとは, $\mathcal{C}$ が次の性質をみたすときにいう: $A/B \sim A'/B'$ で A/B が $\mathcal{C}$ に属するならば, A'/B' も $\mathcal{C}$ に属する. 本章第三節では上記で定義を述べた環拡大のクラスが森田不変であることを示す.

4.2 環拡大の森田同値

本節では [8] で述べられている環拡大の森田同値に関する基本的な事実をまとめ, 後の証明のために補題をいくつか準備する. 本節を通して $A/B \sim A'/B'$ とする. すなわち森田加群 ${}_AM_{A'}$ および ${}_BN_{B'}$ が存在して ${}_AA\otimes_B N_{B'} \cong {}_AM_{B'}$ が成り立つとする. また $N^* = \mathrm{Hom}^r({}_BN, {}_BB)$ とし, $\rho \in N^*$ による $u \in N$ の像を u^ρ で表す. ${}_BN \sim {}_BB$ より, 2 つのシステム $\{g_k, n_k\}$ および $\{f_j, m_j\}$ ($g_k,\ f_j \in N^*$, $n_k,\ m_j \in N$) が存在して $\sum_k n_k{}^{g_k} = 1$ および $\sum_j n^{f_j} \cdot m_j = n$ ($n \in N$) が成り立つ. このとき, 写像

$$\eta : N^* \otimes_B N \longrightarrow B',\quad \eta(\rho \otimes u) = \rho \cdot u_r\ (u_r \text{は}\, u\, \text{の右乗法})$$

により $N^*\otimes_B$ と B は B'-B'-同型である (逆写像 η^{-1} は $\eta^{-1}(h) = \sum_j f_j \otimes m_j{}^h$ で与えられる). さらに写像

$$\xi : N \otimes_{B'} N^* \longrightarrow B,\quad \xi(u \otimes \rho) = u^\rho$$

により $N \otimes_{B'} N^*$ と B は B-B-同型である (逆写像 ξ^{-1} は $\xi^{-1}(b) = \sum_k b \cdot n_k \otimes g_k$ で与えられる). ここで次のような写像 α を考える:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : N^* \otimes_B A \otimes_B N & \longrightarrow & A' = \mathrm{End}^r({}_AA \otimes_B N) \\ \rho \otimes x \otimes u & \longmapsto & [y \otimes v \mapsto y \cdot v^\rho \cdot x \otimes u] \end{array}$$

このとき α は B'-B'-同型であり, α は B'-B'-同型 $N^* \otimes_B B \cong B'$ を誘導する. 実際, 逆写像 α^{-1} は $\alpha^{-1}(h) = \sum_j f_j \otimes (1 \otimes m_j)^h$ により与えられる. これにより $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ における積を

$$(\rho \otimes x \otimes u)(\sigma \otimes y \otimes v) = \rho \otimes x \cdot u^\sigma \cdot y \otimes v$$

と定義することができる. 明らかに $\sum_j f_j \otimes 1 \otimes m_j$ が $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ における単位元であり, α は環同型である. 以上より A' および B' をそれぞれ $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ および $N^* \otimes_B B \otimes_B N$ と同一視することができる.

任意の $x \in A$ について, $x'_{(j,k)} = f_j \otimes x \otimes n_k$ および $x'_{[j,k]} = g_k \otimes x \otimes m_j$ と定める. [8] において, 池畑秀一は次のような 3 つの写像を考えた:

$$\varphi : A \longrightarrow A',\quad \varphi(x) = \sum_j f_j \otimes x \otimes m_j$$

$$\phi : \mathrm{End}^\ell({}_BA_B) \longrightarrow \mathrm{End}^\ell({}_{B'}A'_{B'}),\quad \phi(\eta) = 1 \otimes \eta \otimes 1$$

$$\psi : A \otimes_B A \longrightarrow A' \otimes_{B'} A',\quad \psi(x \otimes y) = \sum_{j,k} x'_{(j,k)} \otimes y'_{[j,k]}$$

これらの写像について, 次の 3 つの補題が知られている. これらは後の定理の証明の際にしばしば利用する.

補題 4.2.1. [8, Lemma 2] φ は環同型 $V_A(B) \cong V_{A'}(B')$, $V_A(A) \cong V_{A'}(A')$, および $V_B(B) \cong V_{B'}(B')$ を誘導する.

補題 4.2.2. [8, Lemma 3]
(1) ϕ は環同型である.
(2) ϕ は加法群の同型 $\mathrm{Hom}^\ell({}_BA_B, {}_BB_B) \cong \mathrm{Hom}^\ell({}_{B'}A'_{B'}, {}_{B'}B'_{B'})$ を誘導する.
(3) ϕ は加法群の同型 $\mathrm{Aut}^\ell(A/B) \cong \mathrm{Aut}^\ell(A'/B')$ を誘導する.
(4) $\mathrm{Aut}^\ell(A/B)$ の部分群 H が $A^H = B$ をみたすとき, $A'^{\phi(H)} = B'$ が成り立つ.

補題 4.2.3. [8, Lemma 4] ψ は加法群の同型 $(A \otimes_B A)^A \cong (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$ を誘導する.

ここからは次節における定理の証明のために補題を 2 つ準備する. まず次の補題を示す.

補題 4.2.4. ψ は加法群の同型 $(A \otimes_B A)^B \cong (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ を誘導する.

証明. まず $\psi((A\otimes_B A)^B) \subseteqq (A'\otimes_{B'} A')^{B'}$ を示す. $N \otimes_{B'} N^* \cong B$ より, 次の B'-B'-同型 θ を考えられる:

$$\theta : A' \otimes_{B'} A' \longrightarrow N^* \otimes_B A \otimes_B A \otimes_B N,$$
$$\theta((\rho \otimes x \otimes u) \otimes (\sigma \otimes y \otimes v)) = \rho \otimes x \cdot u^\sigma \otimes y \otimes v$$

実際, 逆写像 θ^{-1} は

$$\theta^{-1}(\rho \otimes x \otimes y \otimes u) = \sum_k (\rho \otimes x \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y \otimes u)$$

により与えられる. ここで $\sum_r x_r \otimes y_r \in (A \otimes_B A)^B$ とする. このとき任意の $\sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \in B'$ について

$$\begin{aligned}
&\theta(\sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \cdot \psi(\sum_r x_r \otimes y_r)) \\
&= \theta(\sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell \cdot \sum_{r,j,k} (f_j \otimes x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j)) \\
&= \theta(\sum_{r,\ell,j,k} \rho_\ell \otimes b_\ell \cdot {u_\ell}^{f_j} \cdot x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j)) \\
&= \sum_{r,\ell,j} \rho_\ell \otimes b_\ell \cdot u_\ell^{f_j} \cdot x_r \otimes y_r \otimes m_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\ell,j} \rho_\ell \otimes (\sum_r x_r \otimes y_r) \cdot b_\ell \otimes u_\ell^{f_j} \cdot m_j \\
&= \sum_{r,\ell} \rho_\ell \otimes x_r \otimes y_r \cdot b_\ell \otimes u_\ell,
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
&\theta(\psi(\sum_r x_r \otimes y_r) \cdot \sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell) \\
&= \theta(\sum_{r,j,k} (f_j \otimes x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j) \cdot \sum_\ell \rho_\ell \otimes b_\ell \otimes u_\ell) \\
&= \theta(\sum_{r,\ell,j,k} (f_j \otimes x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \cdot {m_j}^{\rho_\ell} \cdot b_\ell \otimes u_\ell) \\
&= \sum_{r,\ell,j} f_j \otimes x_r \otimes y_r \cdot {m_j}^{\rho_\ell} \cdot b_\ell \otimes u_\ell \\
&= \sum_{\ell,j} f_j \cdot {m_j}^{\rho_\ell} \otimes (\sum_r x_r \otimes y_r) \cdot b_\ell \otimes u_\ell \\
&= \sum_{r,\ell} \rho_\ell \otimes x_r \otimes y_r \cdot b_\ell \otimes u_\ell
\end{aligned}
$$

を得る．よって $\psi(\sum_r x_r \otimes y_r) \in (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ であり，したがって ψ は $(A \otimes_B A)^B$ から $(A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ への加法群の準同型を誘導する．いま $\psi(\sum_r x_r \otimes y_r) = 0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
0 = \theta(\psi(\sum_r x_r \otimes y_r)) &= \theta(\sum_{r,j,k} (f_j \otimes x_r \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_r \otimes m_j)) \\
&= \sum_{r,j} f_j \otimes x_r \otimes y_r \otimes m_j
\end{aligned}
$$

より

$$
0 = \sum_{r,j,k} {n_k}^{f_j} \cdot x_r \otimes y_r \cdot {m_j}^{g_k} = \sum_{j,k} {n_k}^{f_j} \cdot {m_j}^{g_k} (\sum_r x_r \otimes y_r) = \sum_r x_r \otimes y_r
$$

となるので ψ は単射である．最後に $\psi((A \otimes_B A)^B) = (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ となることを示す．$X' = \sum_r (\sum_\lambda \rho_{r\lambda} \otimes x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sum_\mu \sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \otimes v_{r\mu}) \in (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ とする．任意の $b \in B$ について $(g_s \otimes b \otimes n_\ell)X' = X'(g_s \otimes b \otimes n_\ell)$ となるのは自明である．このとき

$$
(g_s \otimes b \otimes n_\ell)X' = \sum_{r,\lambda,\mu} (g_s \otimes b \cdot {n_\ell}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \otimes v_{r\mu})
$$

および

$$
X'(g_s \otimes b \otimes n_\ell) = \sum_{r,\lambda,\mu} (\rho_{r\lambda} \otimes x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \cdot {v_{r\mu}}^{g_s} \cdot b \otimes n_\ell),
$$

により

$$b(\sum_{r,\lambda,\mu,\ell} n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot u_{r\lambda}{}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell}) = (\sum_{r,\lambda,\mu,s} n_s{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot u_{r\lambda}{}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_s})b$$

を得る. よって $X = \sum_{r,\lambda,\mu,\ell} n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot u_{r\lambda}{}^{\sigma_{r\mu}} \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell}$ とおけば, $X \in (A \otimes_B A)^B$ である. さらに

$$\begin{aligned}
\psi(X) &= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \cdot u_{r\lambda}{}^{\sigma_{r\mu}} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda})(\sigma_{r\mu} \otimes 1 \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j,k} (f_j \otimes n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes 1 \otimes n_k)(g_k \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j} (f_j \otimes n_\ell{}^{\rho_{r\lambda}} \cdot x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \cdot v_{r\mu}{}^{g_\ell} \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,\lambda,\mu,\ell,j} (f_j \otimes 1 \otimes n_\ell)(\rho_{r\lambda} \otimes x_{r\lambda} \otimes u_{r\lambda}) \otimes (\sigma_{r\mu} \otimes y_{r\mu} \otimes v_{r\mu})(g_\ell \otimes 1 \otimes m_j) \\
&= \sum_{\ell,j} (f_j \otimes 1 \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes m_j) X' \\
&= X'
\end{aligned}$$

より $\psi((A \otimes_B A)^B) = (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ がわかる. □

S を両側 A-加群とし, $S' = N^* \otimes_B S \otimes_B N$ とおく. このとき, 明らかに S' は両側 A'-加群である. また A から S への B-微分 (B-微分については第三章を参照のこと) および A' から S' への B'-微分について, 次のように定める:

$$\mathrm{Der}_B(A, S) = \{D \mid D \text{ は } A \text{ から } S \text{ への } B\text{-微分}\}$$
$$\mathrm{Der}_{B'}(A', S') = \{D' \mid D' \text{は } A' \text{から } S' \text{への } B'\text{-微分}\}$$

明らかに $\mathrm{Der}_B(A, S)$ および $\mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ は加法により群をなす. このとき次の補題が成り立つ.

補題 4.2.5. *ϕ は加法群の同型 $\mathrm{Der}_B(A, S) \cong \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ を誘導する.*

証明. まず $\phi(\mathrm{Der}_B(A, S)) \subset \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ を示す. $D \in \mathrm{Der}_B(A, S)$ とする. このとき, 任意の $x' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda$, $y' = \sum_\mu \sigma_\mu \otimes y_\mu \otimes v_\mu \in A'$ について

$$\phi(D)(x'y')$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(D)(\sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu \otimes v_\mu) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes D(x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (D(x_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu + x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot D(y_\mu)) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} (\rho_\lambda \otimes D(x_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot y_\mu \otimes v_\mu + \rho_\lambda \otimes x_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot D(y_\mu) \otimes v_\mu) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} ((\rho_\lambda \otimes D(x_\lambda) \otimes u_\lambda)(\sigma_\mu \otimes y_\mu \otimes v_\mu) + (\rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda)(\sigma_\mu \otimes D(y_\mu) \otimes v_\mu)) \\
&= \phi(D)(x')y' + x'\phi(D)(y')
\end{aligned}
$$

を得る. また $\phi(D)(B') = 0$ は明らかである. よって $\phi(D) \in \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ であり, したがって ϕ は $\mathrm{Der}_B(A, S)$ から $\mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ への加法群の準同型を誘導する. 任意の $D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ について, $D'(g_k \otimes x \otimes n_\ell) = \sum_\lambda \rho_{k\ell\lambda} \otimes x_{k\ell\lambda} \otimes u_{k\ell\lambda}$ のとき写像 $\widehat{D'}$ を次のように定める:

$$
\widehat{D'} : A \longrightarrow S, \quad \widehat{D'}(x) = \sum_{\lambda,k,\ell} {n_k}^{\rho_{k\ell\lambda}} \cdot x_{k\ell\lambda} \cdot {u_{k\ell\lambda}}^{g_\ell}.
$$

明らかに $\widehat{D'}$ は加法群の準同型である. このとき,

$$
\pi : \mathrm{Der}_{B'}(A', S') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, S), \quad \pi(D') = \widehat{D'}
$$

と定める. 任意の $D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ と x, $y \in A$ について

$$
\begin{aligned}
&D'(g_k \otimes xy \otimes n_\ell) \\
&= D'(\sum_s (g_k \otimes x \otimes n_s)(g_s \otimes y \otimes n_\ell)) \\
&= \sum_s (D'(g_k \otimes x \otimes n_s)(g_s \otimes y \otimes n_\ell) + (g_k \otimes x \otimes n_s) D'(g_s \otimes y \otimes n_\ell)) \\
&= \sum_{\lambda,\mu,s} (\rho_{ks\lambda} \otimes x_{ks\lambda} \otimes u_{ks\lambda})(g_s \otimes y \otimes n_\ell) + (g_k \otimes x \otimes n_s)(\rho_{s\ell\mu} \otimes y_{s\ell\mu} \otimes u_{s\ell\mu}) \\
&= \sum_{\lambda,\mu,s} (\rho_{ks\lambda} \otimes x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s} \cdot y \otimes n_\ell + g_k \otimes x \cdot {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \otimes u_{s\ell\mu})
\end{aligned}
$$

となることより

$$
\begin{aligned}
\pi(D')(xy) &= \sum_{\lambda,\mu,s,k,\ell} ({n_k}^{\rho_{ks\lambda}} \cdot x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s} \cdot y \cdot {n_\ell}^{g_\ell} + {n_k}^{g_k} \cdot x \cdot {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \cdot {u_{s\ell\mu}}^{g_\ell}) \\
&= (\sum_{\lambda,\mu,s,k} {n_k}^{\rho_{ks\lambda}} \cdot x_{ks\lambda} \cdot {u_{ks\lambda}}^{g_s})y + x(\sum_{\lambda,\mu,s,\ell} {n_s}^{\rho_{s\ell\mu}} \cdot y_{s\ell\mu} \cdot {u_{s\ell\mu}}^{g_\ell})
\end{aligned}
$$

$$= \pi(D')(x)y + x\pi(D')(y)$$

を得る. また, $\pi(D')(B) = 0$ は明らかである. よって π は $\mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ から $\mathrm{Der}_B(A, S)$ への加法群の準同型である. 任意の $D \in \mathrm{Der}_B(A, S)$ と $x \in A$ について, 明らかに $\pi(\phi(D))(x) = D(x)$ であり, したがって $\pi\phi = 1_{\mathrm{Der}_B(A,S)}$ を得る. また任意の $D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ について

$$\begin{aligned}
&\phi(\pi(D')(\sigma \otimes x \otimes v) \\
&= \sigma \otimes \pi(D')(x) \otimes v \\
&= \sigma \otimes (\sum_{\lambda,k,\ell} n_k{}^{\rho_{k\ell\lambda}} \cdot x_{k\ell\lambda} \cdot u_{k\ell\lambda}{}^{g_\ell}) \otimes v \\
&= \sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k)(\sum_{\lambda} \rho_{k\ell\lambda} \otimes x_{k\ell\lambda} \otimes u_{k\ell\lambda})(g_\ell \otimes 1 \otimes v) \\
&= \sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k) D'(g_k \otimes x \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes v) \\
&= D'(\sum_{k,\ell} (\sigma \otimes 1 \otimes n_k)(g_k \otimes x \otimes n_\ell)(g_\ell \otimes 1 \otimes v)) \\
&= D'(\sigma \otimes x \otimes v)
\end{aligned}$$

となるので $\phi\pi = 1_{D' \in \mathrm{Der}_{B'}(A',S')}$ がわかる. したがって $\mathrm{Der}_B(A, S)$ と $\mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ は加法群として同型である. □

4.3 森田不変な環拡大のクラス

本節においても前節で用いた表記を引き続き使用する. 本節では本章第一節で述べた環拡大について, そのクラスが森田不変であることを示す. 初めに trivial 拡大について次が成り立つ.

命題 4.3.1. *trivial* 拡大のクラスは森田不変である.

証明. $A/B \sim A'/B'$ を仮定し, A/B が trivial 拡大であるとする. すなわち, 適当な両側 B-加群 S が存在して $A = B \oplus S$ であり, A における積が $(b, s)(c, t) = (bc, bt + sc)$ $(b, c \in B,\ s, t \in S)$ によって与えられているとする. $S' = N^* \otimes_B A \otimes_B N$ とすると明らかに $A' = B' \oplus S'$ である. 任意の A' の元 $(b', s') = (\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes b_\lambda \otimes u_\lambda,\ \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes s_\lambda \otimes u_\lambda)$, $(c', t') = (\sum_\mu \sigma_\mu \otimes c_\mu \otimes v_\mu,\ \sum_\mu \sigma_\mu \otimes t_\mu \otimes v_\mu)$ について,

$$b'c' = \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes b_\lambda \cdot u_\lambda{}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu \otimes v_\mu,$$

$$b't' + s'c' = \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu$$

であることより,

$$\begin{aligned}
&(b', s')(c', t') \\
&= (\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes (b_\lambda, s_\lambda) \otimes u_\lambda)(\sum_\mu \sigma_\mu \otimes (c_\mu, t_\mu) \otimes v_\mu) \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda, s_\lambda)({u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu,\ {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu,\ b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu \\
&= \sum_{\lambda,\mu} (\rho_\lambda \otimes b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu \otimes v_\mu,\ \rho_\lambda \otimes (b_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot t_\mu + s_\lambda \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot c_\mu) \otimes v_\mu) \\
&= (b'c', b't' + s'c')
\end{aligned}$$

を得る. よって A'/B' は trivial 拡大である. □

[36] において, J. C. Robson と L. W. Small は liberal 拡大について考察した. liberal 拡大について次が成り立つ.

命題 4.3.2. liberal 拡大のクラスは森田不変である.

証明. $A/B \sim A'/B'$ かつ A/B は liberal 拡大であるとする. すなわち, $V_A(B)$ の有限個の元の集合 $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$ で $A = \sum_{i=1}^n v_i B$ をみたすものが存在する. $v_i' = \sum_j f_j \otimes v_i \otimes m_j$ とおくと補題 4.2.1 より $v_i' \in V_{A'}(B')$ である. 任意の $x' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes x_\lambda \otimes u_\lambda \in A'$ について, $x_\lambda = \sum_{i=0}^n v_i b_{\lambda i}$ $(b_{\lambda i} \in B)$ と表されるので

$$\begin{aligned}
x' &= \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes (\sum_{i=1}^n v_i b_{\lambda i}) \otimes u_\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_\lambda (\sum_j f_j \cdot {m_j}^{\rho_\lambda}) \otimes v_i b_{\lambda i} \otimes u_\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_\lambda \sum_j f_j \otimes v_i \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot b_{\lambda i} \otimes u_\lambda \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_\lambda \sum_j (f_j \otimes v_i \otimes m_j)(\rho_\lambda \otimes b_{\lambda i} \otimes u_\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^n v_i' (\sum_\lambda \rho_\lambda \otimes b_{\lambda i} \otimes u_\lambda)
\end{aligned}$$

を得る. よって $A' = \sum_i v_i' B'$ であり, したがって A'/B' は liberal 拡大である. □

[20] において, L. Kadison と K. Szlachányi は depth two 拡大について考察し, Proposition 4.1.1 を与えた. depth two 拡大について次が成り立つ.

定理 4.3.3. 左 depth two 拡大のクラスおよび右 depth two 拡大のクラスはともに森田不変である.

証明. $A/B \sim A'/B'$ かつ A/B を左 depth two 拡大であるとする. 命題 4.1.1 より, 適当な $t_i \in (A \otimes_B A)^B$ および $\beta_i \in \mathrm{End}^\ell({}_BA_B)$ が存在して任意の $x,\ y \in A$ について $\sum_i = t_i\beta_i(x)y = x \otimes y$ が成り立つ. $t_i = \sum_r x_{ir} \otimes y_{ir}$ とおくと, 補題 4.2.2 と補題 4.2.4 より

$$\begin{aligned}
\phi(\beta_i) &= 1 \otimes \beta_i \otimes 1 \in \mathrm{End}^\ell({}_{B'}A'_{B'}),\\
\psi(t_i) &= \sum_{i,j,k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j) \in (A' \otimes_{B'} A')^{B'}
\end{aligned}$$

である. ここで補題 4.2.4 の証明で定めた θ を考えると, 任意の A' の元 $z' = \sum_\lambda \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes u_\lambda$, $w' = \sum_\mu \sigma_\mu \otimes w_\mu \otimes v_\mu$ について

$$\theta(z' \otimes w') = \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu$$

および

$$\begin{aligned}
&\theta(\sum_i \psi(t_i)\phi(\beta_i)(z')w')\\
&= \theta(\sum_{i,r,\lambda,\mu,j,k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j)(\rho_\lambda \otimes \beta_i(z_\lambda) \otimes u_\lambda)(\sigma_\mu \otimes w_\mu \otimes v_\mu))\\
&= \theta(\sum_{i,r,\lambda,\mu,j,k} (f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu))\\
&= \sum_{i,\lambda,\mu,j} f_j \otimes t_i \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu\\
&= \sum_{\lambda,\mu,j} f_j \cdot {m_j}^{\rho_\lambda} \otimes \Big(\sum_i t_i \cdot \beta_i(z_\lambda) \cdot {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu\Big) \otimes v_\mu\\
&= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \otimes z_\lambda \otimes {u_\lambda}^{\sigma_\mu} \cdot w_\mu \otimes v_\mu
\end{aligned}$$

となることから $\sum_i \psi(t_i)\phi(\beta_i)(z')w' = z' \otimes w'$ を得る. したがって, 命題 4.1.1 より A'/B' は左 depth two 拡大である. 右 depth two 拡大についても同様に示される. □

[24], A. Mewborn と E. McMahon introduced により平田分離拡大の一般化として強分離拡大が導入された. また [41] において, 菅野孝三は強分離拡大である必要十分条件である命題 4.1.2 を与えた. 強分離拡大について, 次が成り立つ..

定理 4.3.4. 強分離拡大のクラスは森田不変である.

証明. $A/B \sim A'/B'$ かつ A/B を強分離拡大とする. 命題 4.1.2 より, 適当な $v_i \in V_A(B)$ および $\sum_r x_{ir} \otimes y_{ir} \in (A \otimes_B A)^A$ が存在して任意の $u \in V_A(B)$ について $u = \sum_{i,r} v_i x_{ir} u y_{ir}$ が成り立つ. $v'_i = \sum_\lambda f_\lambda \otimes v_i \otimes m_\lambda$ および $\sum_r x'_{ir} \otimes y'_{ir} = \sum_{r,j,k}(f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k) \otimes (g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j)$ とおくと, 補題 4.2.1 および補題 4.2.3 より $v'_i \in V_{A'}(B')$, $\sum_r x'_{ir} \otimes y'_{ir} \in (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$ である. このとき,$u' = \sum_\ell f_\ell \otimes u \otimes m_\ell \in V_{A'}(B')$ ($u \in V_A(B)$) について

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,r} v'_i x'_{ir} u' y'_{ir} \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \otimes v_i \otimes m_\lambda)(f_j \otimes x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \otimes u \otimes m_\ell)(g_k \otimes y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \otimes v_i \cdot {m_\lambda}^{f_j} \cdot x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \otimes u \cdot {m_\ell}^{g_k} \cdot y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,\lambda,j,k,\ell} (f_\lambda \cdot {m_\lambda}^{f_j} \otimes v_i \cdot x_{ir} \otimes n_k)(f_\ell \cdot {m_\ell}^{g_k} \otimes u \cdot y_{ir} \otimes m_j) \\
&= \sum_{i,r,j,k} (f_j \otimes v_i \cdot x_{ir} \otimes n_k)(g_k \otimes u \cdot y_{ir} \otimes y_{ir}) \\
&= \sum_{i,r,j} f_j \otimes v_i \cdot x_{ir} \cdot u \cdot y_{ir} \otimes m_j \\
&= \sum_j f_j \otimes u \otimes m_j \\
&= u'
\end{aligned}
$$

を得る. したがって補題 4.1.2 より A'/B' は強分離拡大である. $\square$

第三章において浜口と中島によって定義された弱分離拡大について考察した. これについて次が成り立つ.

定理 4.3.5. 弱分離拡大のクラスは森田不変である.

証明. $A/B \sim A'/B'$ かつ A/B を弱分離拡大とする. D' を任意の A' の B'-微分とすると補題 4.2.5 より適当な A の B-微分 D により $D' = 1 \otimes D \otimes 1$ と表される. いま A/B は弱分離拡大なので, 適当な $v \in A$ により $D(\alpha) = v\alpha - \alpha v$ $(\alpha \in A)$ と表される. 明らかに $v \in V_A(B)$ である. ここで $v' = \sum_j f_j \otimes v \otimes m_j$ $(\in V'_{A'}(B'))$ とおくと, 任意の $x' = \sum_r \rho_r \otimes x_r \otimes u_r \in A'$ について

$$D'(x') = \sum_r \rho_r \otimes D(x_r) \otimes u_r$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_r \rho_r \otimes (vx_r - x_r v) \otimes u_r \\
&= \sum_r ((\sum_i f_i \cdot m_i{}^{\rho_r}) \otimes vx_r \otimes u_r - \rho_r \otimes x_r v \otimes (\sum_j u_r{}^{f_j} \cdot m_j)) \\
&= \sum_{r,i,j} (f_i \otimes v \cdot m_i{}^{\rho_r} \cdot x_r \otimes u_r - \rho_r \otimes x_r \cdot u_r{}^{f_j} \cdot v \otimes m_j) \\
&= \sum_{r,i,j} ((f_i \otimes v \otimes m_i)(\rho_r \otimes x_r \otimes u_r) - (\rho_r \otimes x_r \otimes u_r)(f_j \otimes v \otimes m_j) \\
&= v'x' - x'v'
\end{aligned}
$$

を得る. よって D' は内部的であり, したがって A'/B' は弱分離拡大である. □

最後に森田不変でない環拡大の例をあげる.

例 4.1. k を素数標数 p の体とし, $A = k[t]$, $B = k[t^p]$ とする. また

$$
A' = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B & B \\ B & B \end{bmatrix}, \quad {}_AM = {}_AA \oplus {}_AA, \quad {}_BN = {}_BB \oplus {}_BB
$$

と定める. このとき, $\mathrm{End}^r({}_AM) = A'$, $\mathrm{End}^r({}_BN) = B'$, および ${}_AA \otimes_B N_{B'} \cong {}_AM_{B'}$ が成り立つので, $A/B \sim A'/B'$ である. ここで A/B について $\{x^p \,|\, x \in A\} \subseteq B$ であるが, A'/B' については $\{(x')^p \,|\, x' \in A'\} \subsetneq B'$ である. 実際, $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A'$ と任意の自然数 n について $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin B'$ となる. よって次のような性質をみたす環拡大 A/B のクラスは森田不変ではない : 適当な自然数 n が存在して $\{x^n \,|\, x \in A\} \subseteq B$ が成り立つ.

注意 4.1. 今までに見てきたように, 良く知られている環拡大のクラスのほとんどは森田不変であるように思われる. しかしながら, 森田不変であるか否か判明していない環拡大のクラスもいくつか存在する. A/B が有限 normalizing 拡大 (finite normalizing extension) であるとは, A の有限個の元の集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が存在して $A = \sum_{i=0}^n a_iB$ かつ $a_iB = Ba_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ が成り立つときにいう. 現在, 有限 normalizing 拡大のクラスが森田不変であるか否かはまだ判明していない. さらに第三章で擬似分離拡大および弱擬似分離拡大について触れたが, これらのクラスも森田不変であるか否かわかっていない.

謝 辞

本研究を進める上で, 指導教員である池畑秀一教授には大変お世話になりました. 先生の助言や激励等の後押しにより研究者としての一歩を踏み出すことができ, 本論文の完成に至りました. この場をお借りして心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] M. Auslander and O. Goldaman, The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **97** 1960, 367–409.

[2] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative ring, *Mem. Amer. Math. Soc.,* **52** 1965, 15–33.

[3] F. DeMeyer and F. Ingraham, Separable algebras over commutative rings, *Lecture Notes in Math.,* **181**, Springer, Berlin, 1971.

[4] S. Elliger, Über automorphismen und derivationen von ringen, *J. Reine Angew. Math.,* **277** 1975, 155–177.

[5] N. Hamaguchi and A. Nakajima, On generalizations of separable polynomials over rings, *Hokkaido Math. J.,* **42** 2013, no. 1, 53–68.

[6] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 360–373.

[7] K. Hirata, Separable extensions and centralizers of rings, *Nagoya Math. J.,* **35** 1969 31–45.

[8] S. Ikehata, On Morita equivalence in ring extensions, *Math. J. Okayama Univ.,* **18** 1975, 73–79.

[9] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 115–129.

[10] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings, *Math, J. Okayama Univ.,* **23** 1981, 19–32.

[11] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings. II, *Math. J. Okayama Univ.,* **25** 1985, 23–28.

[12] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings. II, *Math, J. Okayama Univ.,* **26** 1984, 49–57.

[13] S. Ikehata, A note on separable polynomials in skew polynomial rings of derivation type, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 59–60.

[14] S. Ikehata, On H-separable polynomials of prime degree, *Math. J. Okayama Univ.,* **33** 1991, 21–26.

[15] S. Ikehata, Purely inseparable ring extensions and H-separable polynomials, *Math. J. Okayama Univ.,* **40** 1998, 55–63.

[16] S. Ikehata, Purely inseparable ring extensions and Azumaya algebras, *Math. J. Okayama Univ.,* **41** 1999, 63–69.

[17] S. Ikehata, On H-separable and Galois polynomials of degree p in skew polynomial rings, *Int. Math. Forum,* **3** 2008, no. 29-32, 1581-1586.

[18] S. Ikehata, On separable and H-separable polynomials of degree p in skew polynomial rings, *Int. J. Pure Appl. Math.,* **51** 2009, no. 1, 149–156.

[19] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra. Vol III: Theory of fields and Galois theory, *D. Van Nostrand Co., Inc.,* 1964

[20] L. Kadison and K. Szlachányi, Bialgebroid actions on depth two extensions and duality, *Adv. in Math.,* **179** 2003, 75–121.

[21] K. Kishimoto, On abelian extensions of rings. I, *Math. J. Okayama Univ.,* **14** 1970, 159–174.

[22] H. Komatsu, Quasi-separable extensions of noncommutative rings, *Comm. Algebra,* **29** (3) 2001, 1011–1019.

[23] H. Matsumura, Commutative ring theory. Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8., *Cambridge University Press, Cambridge,* 1986.

[24] A. Mewborn and E. McMahon, Separable extensions of noncommutative rings, *Hokkaido Math. J.,* **13** 1984, 74–88.

[25] Y. Miyashita, On Galois extensions and crossed products, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I,* **21** 1970, 97–121.

[26] Y. Miyashita, On a skew polynomial ring, *J. Math. Soc. Japan,* **31** 1979, no. 2, 317–330.

[27] 中島惇, 微分から見た種々の分離拡大と歪多項式環, 京都大学数理解析研究所講究録 1655, 2009, 22–31.

[28] T. Nagahara, On separable polynomials over a commutative ring II, *Math. J. Okayama Univ.,* **15** 1972, 149–162.

[29] T. Nagahara, On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **19** 1976, 65–95.

[30] T. Nagahara, On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings II, *Math. J. Okayama Univ.,* **21** 1979, 167–177.

[31] T. Nagahara, A note on separable polynomials in skew polynomial rings of atutomorphism type, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 73–76.

[32] T. Nagahara, Some H-separable polynomials of degree 2, *Math. J. Okayama Univ.,* **26** 1984, 87–90.

[33] T. Nagahara, A note on imbeddings of noncommutative separable extensions in Galois extensions, *Houston J. Math.,* **12** 1986, 411–417.

[34] Y. Nakai, On the theory of differentials in commutative rings, *J. Math. Soc. Japan,* **13** 1961, 63–84.

[35] H. Okamoto and S. Ikehata, On H-separable polynomials of degree 2, *Math. J. Okayama Univ.,* **32** 1990, 53–59.

[36] J. C. Robson and L. W. Small, Liberal extensions, *Proc. London Math. Soc.,* (3) **42** 1981, no. 1, 87–103.

[37] K. Sugano, Separable extensions and Frobenius extensions, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 29–40.

[38] K. Sugano, On some commutor theorems of rings, *Hokkaido Math. J.,* **1** 1972, 242–249.

[39] K. Sugano, Note on cyclic Galois extensions, *Proc. Japan Acad.,* **57**, Ser. A 1981, 60–63.

[40] K. Sugano, On separable extensions over a local ring, *Hokkaido Math. J.,* **11** 1982, 111–115.

[41] K. Sugano, On strongly separable Frobenius extensions, *Hokkaido Math. J.,* **25** 1996, 657–666.

[42] G. Szeto and L. Xue, On the Ikehata theorem for H-separable skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **40** 1998, 27–32.

[43] S. Yamanaka and S. Ikehata, An alternative proof of Miyasita's theorem in a skew polynomial rings, *Int. J. Algebra,* **21** 2012, 1011–1023

[44] S. Yamanaka, On separable polynomials in skew polynomial rings, *Proceeding of the 45th symposium on Ring Theory and Representation Theory,* 2013, 174–178.

[45] S. Yamanaka and S. Ikehata, On Galois polynomials of degree p in skew polynomial rings of derivation type, *Southeast Bull. Math.,* **37** 2013, 625–634.

[46] S. Yamanaka, On weakly separable polynomials and weakly quasi-separable polynomials over rings, *Math. J. Okayama Univ.,* to appear.

[47] 山中聡・池畑秀一, 歪多項式環における宮下の定理の別証明, 京都大学数理解析研究所講究録 1809, 2012, 214–223.

[48] 山中聡・池畑秀一, On Galois polynomials in skew polynomial rings, 京都大学数理解析研究所講究録 1873, 2014, 22–30.

[49] 山中聡・池畑秀一, On Frobenius polynomial in skew polynomial rings, 京都大学数理解析研究所講究録 1915, 2014, 38–43.

[50] S. Yuan, On logarithmic derivatives, *Bull. Soc. Math. France,* **96** 1968, 41–52.

[51] S. Yuan, Inseparable Galois theory of exponent one, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **149** 1970, 163–170.